III Calcul intégral

1) Rappels

a) Rappels et définitions. Si $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $t_k = a + kh$

On a : $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)h$ et $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} S_n$

b) Interprétation géométrique

c) Linéarité $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$

d) Primitive notée par une intégrale indéfinie : $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + k$

L'intégrale définie se calcule ainsi : $\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = \big(F(b)\big) - \big(F(a)\big)$

2) Primitives usuelles

$f(t)$	$F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$	$f(t)$	$F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$
$k \in \mathbb{R}$	$k\,t$	x	$\dfrac{t^2}{2}$
t^n	$\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{t^2}$	$\dfrac{-1}{t}$
$\dfrac{1}{t}$	$ln(\lvert t\rvert)$	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$2\sqrt{t}$
e^t	e^t	$\ln(t)$	$t\ln(t) - t$
$\cos(t)$	$\sin(t)$	$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$\dfrac{1}{\cos^2(t)}$	$\tan(t)$	$1+\tan^2(t)$	$\tan(t)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin(t)$	$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\arctan(t)$

3) Calculs de base

a) Intégration par parties $\int u\,\mathrm{d}v = [u\,v] - \int v\,\mathrm{d}u$

b) Changement de variable : avec $t = a\,u$ et $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \int_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} \frac{1}{a^2t^2+a^2}\,a\,du = \left[\frac{1}{a}\arctan(u)\right]_{\frac{\alpha}{a}}^{\frac{\beta}{a}} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{\beta}{a}) - \frac{1}{a}\arctan(\frac{\alpha}{a})$$

On peut retenir la formule : $\int \frac{1}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a})$

4) Fractions rationelles

a) Fraction irréductible : $F(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ avec degré$(P) <$ degré(Q)

b) Partie entière si degré$(P) \geqslant$ degré(Q) $F(t) = E(t) + \dfrac{R(t)}{Q(t)}$ avec degré$(R) <$ degré(Q)

c) Décomposition des fractions irréductibles en éléments simples.
Pôles réels d'une fraction. Partie principale relative au pôle a d'ordre n
Éléments simples de première espèce : $\dfrac{A}{(t-a)^n}$
Pôles complexes d'une fraction.
Éléments simples de seconde espèce : $\dfrac{A\,t+B}{(t^2+p\,t+q)^n}$ avec dénominateur à $\Delta<0$.

5) Exemples de décompositons en éléments simples

$$\frac{t^4-3t^3-t^2+2t+13}{t^3-2t^2-5t+6}=t-1+\frac{2t^2-9t+19}{(t-3)(t-1)(t+2)}=t-1+\frac{1}{t-3}-\frac{2}{t-1}+\frac{3}{t+2}$$

$$\frac{2t^2+t-1}{t^3-t^2+t-1}=\frac{2t^2+t-1}{(t-1)(t^2+1)}=\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+1}$$

$$\frac{t^4}{(t+1)(t^2+1)}=t-1+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}+\frac{\frac{1+i}{4}}{t-i}+\frac{\frac{1-i}{4}}{t+i}=t-1+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}-\frac{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}{t^2+1}$$

$$\frac{4t+10}{t^2+2t+5}=\frac{2(2t+2)}{t^2+2t+5}+\frac{6}{(t+1)^2+4}=2\frac{(2t+2)}{t^2+2t+5}+3\frac{2}{(t+1)^2+2^2}$$

6) Exemples d'intégration de fractions rationnelles

$$\int_0^1\frac{5t-13}{t^2-5t+6}\,dt=\int_0^1\frac{2}{t-3}+\frac{3}{t-2}\,dt=\ln\left(\frac{1}{18}\right)$$

$$\int_1^2\frac{4t^2+6t-70}{(t-5)(t-3)(t+1)}\,dt=\int_1^2\frac{5}{t-5}+\frac{2}{t-3}-\frac{3}{t+1}\,dt=\ln\left(\frac{9}{512}\right)$$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{5t^2-2t+5}{t^3+t}\,dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{5}{t}-\frac{2}{t^2+1}\,dt=\frac{5}{2}\ln(3)+\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0\frac{2t^2+t-1}{t^3-t^2+t-1}\,dt &= \int_{-1}^0\frac{2t^2+t-1}{(t-1)(t^2+1)}\,dt\\
&= \int_{-1}^0\frac{1}{t-1}+\frac{t}{t^2+1}+\frac{2}{t^2+1}\,dt\\
&= \left[\ln(1-t)+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan(t)\right]_{-1}^0\\
&= \Big(\ln(1)+\frac{1}{2}\ln(1)+2\arctan(0)\Big)-\Big(\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(2)+2\arctan(-1)\Big)\\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{3\ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1}\frac{4t+10}{t^2+2t+5}\,dt &= \int_{-1}^{+1}\left(2\frac{(2t+2)}{t^2+2t+5}+3\frac{2}{(t+1)^2+2^2}\right)dt\\
&= \left[2\ln(t^2+2t+5)+3\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]_{-1}^{+1}\\
&= \Big(2\ln(8)+3\arctan(1)\Big)-\Big(2\ln(4)+3\arctan(0)\Big)\\
&= 2\ln(2)+\frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$