IV Équations différentielles

1) Exemples, généralités

Si on note : $x = \varphi(t)$ $x' = \varphi'(t)$ $x'' = \varphi''(t)$

$F(x, x') = 0$ est une équation différentielle du premier ordre.

$G(x, x', x'') = 0$ est une équation différentielle du second ordre.

Exemple : fonction d'onde : $\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dy}\right) = 0$

2) Équations linéaires du premier ordre

a) Équation sans second membre :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

Les fonctions a et b sont continues sur l'intervalle $I \in \mathbb{R}$ et a ne s'annule pas sur l'intervalle I .

La fonction $\frac{b}{a}$ est donc continue sur $I \in \mathbb{R}$ et admet une primitive $F(t)$ sur I .

De plus la fonction : $t \mapsto e^{F(t)}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I .

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow a(t)x'(t)e^{F(t)} + b(t)x(t)e^{F(t)} = 0 &\Leftrightarrow x'(t)e^{F(t)} + \frac{b(t)}{a(t)}x(t)e^{F(t)} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'(t)e^{F(t)} + F'(t)x(t)e^{F(t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x(t)e^{F(t)})}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Donc : $x(t)e^{F(t)} = K \in \mathbb{R}$ et la solution générale est :

$x(t) = Ke^{-F(t)}$

b) Exemples :

Sur $I = \mathbb{R}$	$x'(t) + 4x(t) = 0$	la solution est : $x(t) = Ke^{-4t}$
Sur $I = \mathbb{R}^{+*}$	$t x'(t) - x(t) = 0$	la solution est : $x(t) = Kt$
Sur $I =]2; \infty[$	$(t^2 - 4)x'(t) - 3tx(t) = 0$	la solution est : $x(t) = K\sqrt{(t^2 - 4)^3}$
	Attention : Sur $I =]-2; 2[$	la solution est : $x(t) = K\sqrt{(4 - t^2)^3}$

c) Équation complète :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t) \tag{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow a(t)x'(t)e^{F(t)} + b(t)x(t)e^{F(t)} = c(t)e^{F(t)} \Leftrightarrow \frac{d(x(t)e^{F(t)})}{dt} = \frac{c(t)}{a(t)}e^{F(t)}$$

Donc : $x(t)e^{F(t)} = G(t) + K$ avec : $G'(t) = \frac{c(t)}{a(t)}e^{F(t)}$ et $K \in \mathbb{R}$

La solution générale est donc :

$x(t) = Ke^{-F(t)} + G(t)e^{-F(t)}$

Conclusion :

La solution générale de l'équation différentielle (2) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est la somme :

- de la solution générale de l'équation sans second membre (1)
- et d'une solution particulière de l'équation complète (2)

d) Exemples : Recherche de solutions particulières.

$$\begin{aligned} \text{Sur : } I = \mathbb{R} & \quad x'(t) + 2t x(t) = (1 + 2t)e^t & \text{ la solution est : } x(t) = K e^{-t^2} + e^t \\ \text{Sur : } I = \mathbb{R}^+ & \quad (1 + t) x'(t) - 2 x(t) = 1 & \text{ la solution est : } x(t) = K(1 + t^2) - \frac{1}{2} \\ \text{Sur : } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[& \quad \cos(t) x'(t) + \sin(t) x(t) = t \\ & \quad \text{la solution est : } x(t) = K \cos(t) + t \sin(t) + \cos(t) \ln(\cos(t)) \end{aligned}$$

3) Équations du second ordre à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

a) Équation sans second membre : $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$ $c \in \mathbb{C}$

$$a x''(t) + b x(t) + c x(t) = 0 \quad (3)$$

Solutions de la forme : $t \mapsto e^{rt}$ avec r solution de l'équation caractéristique :

$$a r^2 + b r + c = 0 \quad (4)$$

Si Δ est le déterminant de l'équation caractéristique, on a :

	Équation caractéristique (4)	Équation différentielle (3)
$\Delta > 0$	solutions réelles distinctes $r_1 \neq r_2$	$x(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	solution réelle double r_0	$x(t) = (A t + B) e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	solutions complexes $\alpha \pm i\beta$	$x(t) = e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$

b) Équation complète :

$$a x''(t) + b x(t) + c x(t) = f(t) \quad (5)$$

La solution générale de l'équation différentielle (5) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est la somme :

- de la solution générale de l'équation sans second membre (3)
- et d'une solution particulière de l'équation complète (5)

c) Exemples : Sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x''(t) - 2x(t)' - 3x(t) &= 3t^2 + 1 & \text{ solution : } x(t) &= A e^{-t} + B e^{3t} - t^2 + \frac{4t}{3} - \frac{17}{9} \\ x''(t) - x(t) &= 2t e^t & \text{ solution : } x(t) &= A e^t + B e^{-t} + \frac{t^2 - t}{2} e^t \\ x''(t) - 2x(t)' + x(t) &= \cos(t) & \text{ solution : } x(t) &= (At + B) e^t - \frac{\sin(t)}{2} \\ x''(t) + x(t) &= \cos(t) & \text{ solution : } x(t) &= A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{t \sin(t)}{2} \\ x''(t) + 2x(t)' + 2x(t) &= \sin(t) e^{-t} & \text{ solution : } x(t) &= e^{-t} (A \cos(t) + B \sin(t)) + \frac{t e^{-t} \cos(t)}{2} \\ x''(t) + 4x(t) &= t \cos(2t) & \text{ solution : } x(t) &= A \cos(2t) + B \sin(2t) + \frac{t \cos(2t)}{16} + \frac{t^2 \sin(2t)}{8} \end{aligned}$$