Intégrale de Laplace

1) Transformée de Laplace

a) On appelle Transformée de Laplace de f la fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad \text{avec :} \qquad p \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad p \in \mathbb{C}$$

On écrira : $F(p) = \mathscr{L}\left[f(t)\right]$ où $\mathcal{L}$ représente la transformée de Laplace.

b) Formules de base avec : $\mathscr{U}$: $\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ et $t > 0$

$$\mathscr{L}\left[\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{1}{p} \qquad ; \qquad \mathscr{L}\left[t^n\, \mathscr{U}(t)\right] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{-at}\, \mathscr{U}(t)\right] = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathscr{L}\left[\cos(\omega t)\, \mathscr{U}(t)\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad ; \qquad \mathscr{L}\left[\sin(\omega t)\, \mathscr{U}(t)\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

2) Propriétés de la Transformation de Laplace

a) Linéarité : $\mathscr{L}\left[\lambda f + \mu g\right] = \lambda\, \mathscr{L}\left[f\right] + \mu\, \mathscr{L}\left[g\right]$

b) Formule du retard : $\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\, \mathscr{U}(t-\tau)\right] = F(p) e^{-\tau p}$

c) Transformée de $f(at)e^{-ap}$: $\mathscr{L}\left[f(t)e^{-at}\right] = F(p+a)$

d) Transformée de la dérivée :

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\right] = p\, F(p) - f(0^+)$$

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\right] = p^2 F(p) - p\, f(0^+) - f'(0^+)$$

e) Autres propriétés :

Primitive : $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(x)\, dx\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ Transformée de $f(at)$: $\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$

3) Transformation de Laplace inverse

a) Notation et Propriétés : $\mathscr{L}^{-1}\left[\lambda F + \mu G\right] = \lambda\, \mathscr{L}^{-1}\left[F\right] + \mu\, \mathscr{L}^{-1}\left[G\right]$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F(a\, p)\right] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \qquad ; \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[F(p+a)\right] = e^{-at} f(t)$$

b) Recherche des originaux :

Utilisation des formules des fonctions usuelles :

F(p)		f(t)
$\dfrac{4}{p^3}+\dfrac{3}{p^2}-\dfrac{5}{p}=2\dfrac{2}{p^3}+3\dfrac{1}{p^2}-5\dfrac{1}{p}$		$(2t^2+3t-5)\ \mathscr{U}(t)$
$\dfrac{5}{p+4}$		$5e^{-4t}\ \mathscr{U}(t)$
$\dfrac{1}{p^5}=\dfrac{1}{24}\dfrac{4!}{p^5}$		$\dfrac{1}{24}t^4\ \mathscr{U}(t)$
$\dfrac{3p+5}{p^2+4p+3}=\dfrac{3p+5}{(p+1)(p+3)}=\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{2}{p+3}$		$(e^{-t}+2e^{-3t})\ \mathscr{U}(t)$
$\dfrac{2p+3}{p^2+4}=2\dfrac{p}{p^2+2^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{p^2+2^2}$		$\Big(2\cos(2t)+\dfrac{3}{2}\sin(2t)\Big)\ \mathscr{U}(t)$
$\dfrac{1}{p^2+7}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ \dfrac{\sqrt{7}}{p^2+(\sqrt{7})^2}$		$\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ \sin(\sqrt{7}t)\ \mathscr{U}(t)$

Utilisation des formules de propriétés :

Rappel :

$$\begin{array}{|llll} & \mathscr{L}^{-1} & & \\ f(t)\ \mathscr{U}(t) & \longmapsto & F(p) & \\ f(t-\tau)\ \mathscr{U}(t-\tau) & \longmapsto & F(p)e^{-\tau p} & \text{formule du retard} \\ f(t)e^{-at}\ \mathscr{U}(t) & \longmapsto & F(p+a) & \text{produit par une exponentielle} \end{array}$$

On comparera ces exemples avec les exemples ci-dessus :

$F(p)=\left(\dfrac{4}{p^3}+\dfrac{3}{p^2}-\dfrac{5}{p}\right)e^{-2p}$ formule du retard $f(t)=\Big(2(t-2)^2+3(t-2)-5\Big)\ \mathscr{U}(t-2)$

$F(p)=\dfrac{5\ e^{-2p}}{p+4}$ formule du retard $f(t)=5e^{-4(t-2)}\ \mathscr{U}(t-2)$

$F(p)=\dfrac{1}{(p+3)^5}$ produit par une exponentielle $f(t)=\dfrac{1}{24}\ t^4\ e^{-3t}\ \mathscr{U}(t)$

$F(p)=\dfrac{3p+5}{p^2+4p+3}\ e^{-p}$ formule du retard $f(t)=(e^{-(t-1)}+2e^{-3(t-1)})\ \mathscr{U}(t-1)$

$F(p)=\dfrac{2p+7}{p^2+2p+8}=2\dfrac{p+2}{(p+2)^2+2^2}+\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{(p+2)^2+2^2}$

produit par une exponentielle $f(t)=\Big(2\cos(2t)+\dfrac{3}{2}\sin(2t)\Big)\ e^{-2t}\ \mathscr{U}(t)$

$F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p^2+4p+11}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ \dfrac{\sqrt{7}}{(p+2)^2+(\sqrt{7})^2}\ e^{-3p}$

produit par une exponentielle + retard $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ \sin\big(\sqrt{7}(t-3)\big)\ e^{-2(t-3)}\ \mathscr{U}(t-3)$

4) Transformation de Laplace pour les équations différentielles

a) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

$$\Big(p^2X(p) - p - 0\Big) - \Big(pX(p) - 1\Big) - 6X(p) = \frac{2}{p} \qquad \text{par : } \mathcal{L}$$

$$\left(p^2 - p - 6\right) X(p) = \frac{2}{p} + p - 1$$

$$X(p) = \frac{p^2 - p - 2}{p\,(p^2 - p - 6)} = \frac{p^2 - p - 2}{p\,(p-3)(p+2)}$$

$$X(p) = \frac{8}{15(p-3)} + \frac{4}{5(p+2)} - \frac{1}{3p}$$

retour à l'original, par : $\mathcal{L}^{-1}$ $\quad x(t) = \left(\frac{8}{15}\,e^{3t} + \frac{4}{5}\,e^{-2t} - \frac{1}{3}\right)\mathscr{U}(t)$

b) $x''(t) - 3\,x'(t) + 2x(t) = e^{-t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$

$$\Big(p^2X(p) - p - 0\Big) - 3\Big(pX(p) - 1\Big) + 2X(p) = \frac{1}{p+1} \qquad \text{par : } \mathcal{L}$$

$$\left(p^2 - 3p + 2\right) X(p) = \frac{1}{p+1} + p - 3$$

$$X(p) = \frac{p^2 - 2p - 2}{(p+1)\,(p^2 - 3p + 2)} = \frac{p^2 - p - 2}{(p+1)(p-1)(p-2)}$$

$$X(p) = \frac{1/6}{(p+1)} + \frac{3/2}{(p-1)} - \frac{2/3}{p-2}$$

retour à l'original, par : $\mathcal{L}^{-1}$ $\quad x(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{3}{2}\,e^{t} - \frac{2}{3}\,e^{2t}\right)\mathscr{U}(t)$

c) $x''(t) + 2\,x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$p^2X(p) + 2pX(p) + X(p) = \frac{1}{p^2} \qquad \text{par : } \mathcal{L}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2\,(p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p^2\,(p+1)^2}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2}{p+1}$$

retour à l'original, par : $\mathcal{L}^{-1}$ $\quad x(t) = \Big(t - 2 + (t+2)e^{-t}\Big)\mathscr{U}(t)$

d) $x''(t) + 2\,x'(t) + 5\,x(t) = 5e^{-t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 1$ et $x'(0) = 1$

$$\Big(p^2X(p) - p - 1\Big) + 2\Big(pX(p) - 1\Big) + 5X(p) = \frac{5}{p+1} \qquad \text{par : } \mathcal{L}$$

$$X(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{p+1} - \frac{p-7}{p^2 + 2p + 5}\right)$$

$$X(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{p+1} - \frac{(p+1)}{(p+1)^2 + 2^2} + 4\,\frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}\right)$$

retour à l'original, par : $\mathcal{L}^{-1}$ $\quad x(t) = \frac{1}{4}\Big(5 - \cos(2t) + 4\sin(2t)\Big)\,e^{-t}\,\mathscr{U}(t)$