VII Limites, Développements Limités

1) Rappels sur les limites

a) Théorèmes sur les limites $\quad f+g \quad f\times g \quad f+g \quad \dfrac{f}{g} \quad \sqrt{f} \quad f<g$

b) Les formes indéterminées $\quad \infty-\infty \quad 0\times\infty \quad \dfrac{0}{0} \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad 1^{\infty} \quad 0^{0} \quad \infty^{0}$

Attention $\quad \dfrac{0}{\infty} \quad \dfrac{\infty}{0} \quad 0^{\infty}$ ne sont pas indéterminées.

c) Exemples

$$\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t^2+1}-t \quad ; \quad \lim_{t\to1}\frac{t^3+t^2-2}{t^4+t^3-2} \quad ; \quad \lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\frac{t+2}{t^2+t-2} \quad , \quad \lim_{\substack{t\to1\\t>1}}\frac{t+2}{t^2+t-2}$$

2) Les infiniment petits et les infiniment grands

a) Definition des infiniment petits et grands

Infiniment petit : $\quad f\to0 \qquad$ Infiniment grand : $\quad f\to\infty$

b) Definition des fonctions équivalentes $\quad$ Si $\displaystyle\lim_{t\to\lambda}\frac{f(t)}{g(t)}=1$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $\lambda=\pm\infty$

On écrit $\quad f(t)\underset{t\to\lambda}{\sim}g(t)$ ou $f\underset{\lambda}{\sim}g$ et on dit que f est équivalent à g au voisinage de λ

On a ainsi $\quad \sin(t)\underset{t\to0}{\sim}t \;;\; \tan(t)\underset{t\to0}{\sim}t$

c) Partie principale, infiniment petit ou grant de référence

On dit que $f(t)$ est un infiniment petit d'ordre p par rapport à l'infiniment petit principal $g(t)$ au voisinage de λ si $\displaystyle\lim_{t\to\lambda}\frac{f(t)}{\big(g(t)\big)^p}=K\neq0$

On a alors $\quad f(t)\underset{t\to\lambda}{\sim}K\big(g(t)\big)^p$ ou aussi $\quad f(t)=K\big(g(t)\big)^p\big(1+\varepsilon(t)\big)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to\lambda}\varepsilon(t)=0$

On choisit pour infiniment petit ou grant de référence les fonctions suivantes

	infiniment petit de référence	infiniment grand de référence
$\lambda\to0$	$t\mapsto t$	$t\mapsto\dfrac{1}{t}$
$\lambda\to a\in\mathbb{R}^*$	$t\mapsto t-a$	$t\mapsto\dfrac{1}{t-a}$
$\lambda\to\infty$	$t\mapsto\dfrac{1}{t}$	$t\mapsto t$

d) Applications $\quad 1-\cos(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{t^2}{2} \;;\; \dfrac{1}{1+t}\underset{t\to0}{\sim}1-t \;;\; \sqrt[n]{1+t}\underset{t\to0}{\sim}1+\dfrac{t}{n} \;;$

$$\lim_{t\to0}\frac{t\,(1-t)\,\sin(\omega t)}{1-\cos(t)}=\frac{\omega}{2} \quad ; \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\big(1-\sin(t)\big)\,\tan^2(t)=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{t\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan(t)}{\cos(2\,t)}=1$$

3) Formules de Taylor et de Mac Laurin

a) Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\, du$$

b) Formule de Mac Laurin

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + t^n\, \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

4) Les Développements Limités (DL)

a) Définition $f(t)$ admet un DL d'ordre n au voisinage de zéro, si

$$f(t) = P_n(t) + t^n \underset{\substack{\varepsilon(t) \to 0 \\ t \to 0}}{\varepsilon(t)}$$

avec $P_n(t)$ un polynôme de degré n.

b) Propriété
Si $f(t)$ admet un DL, ce DL est unique, et donc, on peut le déterminer de différentes façons.

c) Application
DL par division $\dfrac{1}{1+t}$ $\dfrac{1}{1-t}$
DL par la formule de Taylor $\sin(t)$ $\cos(t)$ e^t $(1+t)^\alpha$

5) Opérations sur les DL

a) Somme principe de détermination de l'ordre du DL

b) Produit Division $2\, \sin(t) \cos(t)$ $\tan(t)$

c) Dérivation $\sin(t)$ $\cos(t)$

d) Intégration $\ln(1+t)$ $\arctan(t)$

e) Composition $\sin(2t)$

6) Généralisation des DL à l'infini

Exemple

$$t \longmapsto f(t) = \sqrt[3]{t^3 + 2\,t^2 + t} = t\, \sqrt[3]{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}$$