X Algèbre Linéaire Calcul Matriciel

1) Généralités

- a) Espace Vectoriel $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ou $\vec{u} \in \mathbb{C}^n$ $\vec{u} : (u_i)$ avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- b) Propriétés caractéristiques $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \forall i u_i = v_i$
- c) Combinaisons linéaires, Bases changement de base

2) Applications linéaires, Endomorphismes, Matrices

- a) Exemple d'application linéaire : la rotation dans $\mathbb{R}^2$

Application linéaire : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec : $\begin{cases} X = x + y \\ Y = x \end{cases}$

- b) Produit des matrices. Matrice Identité, Rotations $\pm \frac{\pi}{4}$ ou $\pm \theta$

- c) Matrices inversibles Isomorphismes.

Inverser $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ on a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3) Changement de base, Calcul

- a) Changement de base.

La matrice P qui permet de passer de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est obtenue en prenant les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans $\mathcal{B}$. P^{-1} permet alors de passer de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

- b) Changement de base d'un vecteur, d'une matrice.

La matrice P permet de calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}'$

$$(V = P \times V') \quad \text{et} \quad A' = P^{-1} \times A \times P$$

Exemple : $\vec{i}' = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{j}' = 2\vec{i} - \vec{j}$

4) Valeurs propres, Vecteurs propres, Diagonalisation

- a) Définitions. $A.V = \lambda.V$ V vecteur propre et λ valeur propre.

Il faut résoudre le système $(A - \lambda.I)V = 0$

Le déterminant caractéristique de l'endomorphisme est $\det(A - \lambda.I)$

- b) Diagonalisation de la matrice A .

Si P est la matrice de passage de la base de départ, dans la base des vecteurs propres, la matrice $A' = P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale.

c) Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 : (1; 2) \\ \vec{v}_2 : (-1; 1) \end{cases} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 : (1; 1; 1) \\ \vec{v}_2 : (1; -1; 0) \\ \vec{v}_3 : (1; 0; -1) \end{cases} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

d) Application aux systèmes différentiels. (S)
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a_1x(t) + b_1y(t) + c_1z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = a_2x(t) + b_2y(t) + c_2z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = a_3x(t) + b_3y(t) + c_3z(t) \end{cases}$$

Si $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable, avec un changement de base de matrice P , on

obtient la solution du système différentiel (S)
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = P \times \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ C_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$$
 où les λ_i sont les valeurs propres de A et les constantes d'intégration sont $C_i \in \mathbb{R}$

Exemple :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t) + y(t) - z(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) - y(t) + z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -x(t) + y(t) + z(t) \end{cases} \iff \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ on a } B = P^{-1} \times A \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x(t) = C_1 e^t - C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \\ y(t) = C_1 e^t - 2C_3 e^{-2t} \\ z(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} \end{cases}$$