TS 1 IRIS : Sujet n° 2 A

L'usage de la calculette et du formulaire est interdit dans ce devoir.
Écrire très lisiblement.
Numéroter clairement chaque exercice et encadrer chaque réponse.

1)

Calculer une valeur simplifiée des nombres complexes suivants :

a) $(5+i)(2-3i)$ **b)** $(i-1)^{10}$

c) $\left(i-\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$ **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^6$

On donnera les réponses, sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

2)

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équations suivante et donner une représentation graphique des solutions :

$$z^4 = 16$$

3)

Linéariser à l'aide des formules d'Euler l'expression suivante :

$$f(x) = \sin^2(x)\cos(2x)$$

4)

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ tel que :

$$z \quad \mapsto \quad Z = f(z) = i\,z + 2 - 2i$$

a) Placer sur une figure les points O, I, A et J, dont les affixes respectives sont : 0, 1, $1+i$ et i ainsi que leurs images O', I', A', J' par la transformation f.

b) Placer sur une seconde figure (C) l'ensemble de points d'affixe $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta \leqslant \pi$ et son image (C') par la transformation f.

c) Préciser la nature de la transformation f.

On n'oubliera pas de calculer l'affixe du point invariant.

TS 1 IRIS : Sujet n° 2 B

L'usage de la calculette et du formulaire est interdit dans ce devoir.
Écrire très lisiblement.
Numéroter clairement chaque exercice et encadrer chaque réponse.

---

1)

Calculer une valeur simplifiée des nombres complexes suivants :

a) $(1-2i)(3i-1)$ **b)** $(1-i)^8$

c) $\left(i\sqrt{3}-1\right)\left(i+\sqrt{3}\right)^2$ **d)** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}\right)^6$

On donnera les réponses, sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

---

2)

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équations suivante et donner une représentation graphique des solutions :

$$z^4 = 81$$

---

3)

Linéariser à l'aide des formules d'Euler l'expression suivante :

$$f(x) = \cos^2(x)\sin(2x)$$

---

4)

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ tel que :

$$z \quad \longmapsto \quad Z = f(z) = i\,z - 1 + i$$

a) Placer sur une figure les points O, I, A et J, dont les affixes respectives sont : 0, 1, $1+i$ et i ainsi que leurs images O', I', A', J' par la transformation f.

b) Placer sur une seconde figure (C) l'ensemble de points d'affixe $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta \leqslant \pi$ et son image (C') par la transformation f.

c) Préciser la nature de la transformation f.

On n'oubliera pas de calculer l'affixe du point invariant.

TS 1 IRIS : Sujet n° 2 A (Solution)

1)

Calculer une valeur simplifiée des nombres complexes suivants :

a) $\boxed{(5+i)(2-3i) = 13-13i = 13\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

b) $\boxed{(i-1)^{10} = \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)^{10} = 2^5 e^{\frac{15i\pi}{2}} = 2^5 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -32i}$

c) $\boxed{(i-\sqrt{3})\left(1+i\sqrt{3}\right)^2 = 2\,e^{\frac{5i\pi}{6}}\left(2\,e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} = -8i}$

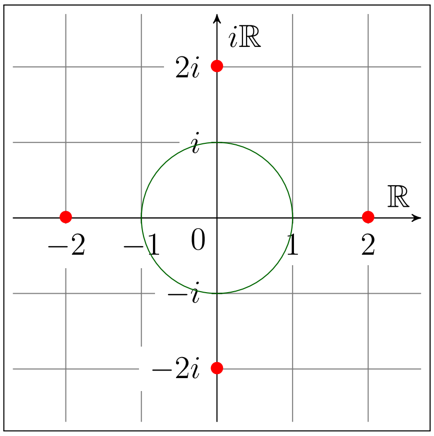
d) $\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^6 = \left(\frac{2\,e^{-\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}\right)^6 = \frac{2^6 e^{-i\pi}}{2^3 e^{-\frac{3i\pi}{2}}} = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i}$

2)

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équations suivante et donner une représentation graphique des solutions : $z^4 = 16$

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = 16 \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \rho^4 & = & 16 \\ 4\theta & = & 2k\pi \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \rho & = & 2 \\ \theta & = & \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & 2 \\ z_1 & = & 2i \\ z_2 & = & -2 \\ z_3 & = & -2i \end{array}\right.}$$



3)

Linéariser à l'aide des formules d'Euler l'expression suivante :

$$f(x) = \sin^2(x)\cos(2x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^3}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2^3}\left(e^{4ix}-2e^{2ix}+2-2e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \qquad \boxed{f(x) = -\frac{1}{4}\left(\cos(4x)-2\cos(2x)+1\right)}$$

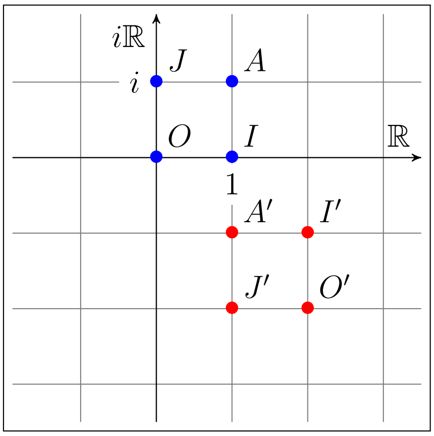
4)

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ tel que :

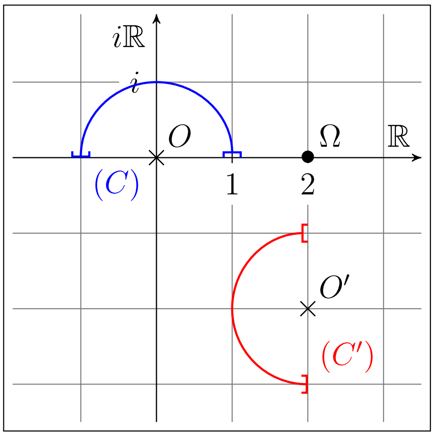
$$z \quad \mapsto \quad Z = f(z) = i\,z + 2 - 2i$$

a) Placer sur une figure les points O, I, A et J, dont les affixes respectives sont : 0, 1, $1+i$ et i ainsi que leurs images O', I', A', J' par la transformation f.

$$\begin{array}{cc} O \mapsto O' & f(0) = 2 - 2i \\ I \mapsto I' & f(1) = 2 - i \\ A \mapsto A' & f(1+i) = 1 - i \\ J \mapsto J' & f(i) = 1 - 2i \end{array}$$



b) Placer sur une seconde figure (C) l'ensemble de points d'affixe $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta \leqslant \pi$ et son image (C') par la transformation f.



c) Préciser la nature de la transformation f.
Recherche de l'affixe du point invariant :

$$\begin{aligned} iz + 2 - 2i &= z \\ (-1+i)\,z &= -2 + 2i \\ z &= \frac{-2+2i}{-1+i} \qquad \boxed{z = 2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est une rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } (2) \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} = \arg(i)}$$

TS 1 IRIS : Sujet n° 2 B (Solution)

1)

Calculer une valeur simplifiée des nombres complexes suivants :

a) $$\boxed{(1-2i)(3i-1) = 5+5i = 5\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

b) $$\boxed{(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^8 = 2^4 e^{-2i\pi} = 16}$$

c) $$\boxed{\left(i\sqrt{3}-1\right)\left(i+\sqrt{3}\right)^2 = 2\,e^{\frac{2i\pi}{3}}\left(2\,e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^2 = 2^3 e^{i\pi} = -8}$$

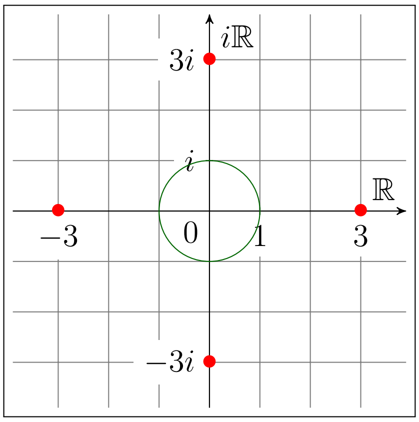
d) $$\boxed{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}\right)^6 = \left(\frac{2\,e^{\frac{i\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}\right)^6 = \frac{2^6 e^{2\pi}}{2^9 e^{\frac{3i\pi}{2}}} = \tfrac{1}{2^3}e^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{i}{8}}$$

2)

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équations suivante et donner une représentation graphique des solutions : $z^4 = 81$

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = 81 \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \rho^4 &=& 81 \\ 4\theta &=& 2k\pi \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \rho &=& 3 \\ \theta &=& \frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} z_0 &=& 3 \\ z_1 &=& 3i \\ z_2 &=& -3 \\ z_3 &=& -3i \end{array}\right.}$$



3)

Linéariser à l'aide des formules d'Euler l'expression suivante :

$$f(x) = \cos^2(x)\sin(2x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3 i}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^3 i}\left(e^{4ix}+2e^{2ix}-2e^{-2ix}-e^{-4ix}\right) \qquad \boxed{f(x) = \frac{1}{4}\big(\sin(4x)+2\sin(2x)\big)}$$

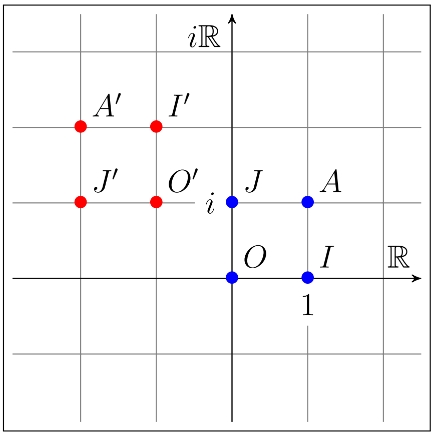
4)

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ tel que :

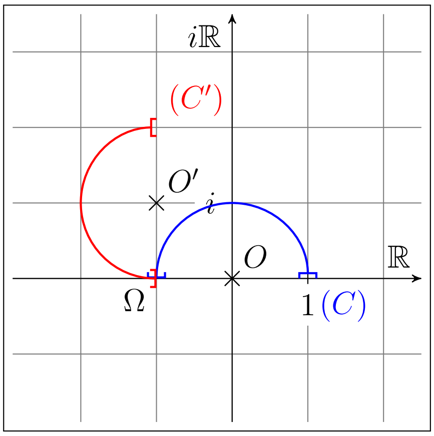
$$z \quad \mapsto \quad Z = f(z) = i\,z - 1 + i$$

a) Placer sur une figure les points O, I, A et J, dont les affixes respectives sont : 0, 1, $1+i$ et i ainsi que leurs images O', I', A', J' par la transformation f.

$$\begin{array}{lr} O \mapsto O' & f(0) = -1 + i \\ I \mapsto I' & f(1) = -1 + 2i \\ A \mapsto A' & f(1+i) = -2 + 2i \\ J \mapsto J' & f(i) = -2 + i \end{array}$$



b) Placer sur une seconde figure (C) l'ensemble de points d'affixe $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta \leqslant \pi$ et son image (C') par la transformation f.



c) Préciser la nature de la transformation f.
Recherche de l'affixe du point invariant :

$$\begin{aligned} iz - 1 + i &= z \\ (-1+i)\,z &= 1 - i \\ z &= \frac{1-i}{-1+i} \qquad \boxed{z = -1} \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est une rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } (-1) \text{ d'angle } \frac{\pi}{2} = \arg(i)}$$