

A

TS 1 IRIS : Devoir n° 3

1) Transformation complexe

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ définie ainsi :

$$z \longmapsto Z = f(z) = \frac{i(z+2)}{z+1}$$

a) Soit le point O d'affixe (0) et le point A d'affixe $(-1+i)$.

Déterminer les affixes des images $O' = f(O)$ et $A' = f(A)$.

Placer sur une figure les points O , A , O' et A' sur une même figure.

b) Montrer que l'on peut écrire $f(z)$ sous la forme : $f(z) = \frac{i}{z+1} + i$

c) Déterminer la nature de la transformation f en la décomposant en transformations élémentaires.

d) Soit D l'axe des réels et $D' = f(D)$ son image par la transformation f .

Représenter pas à pas la transformation de D sur une nouvelle figure *sans oublier de nommer les intermédiaires*.

e) Soit Δ l'axe des imaginaires et $\Delta' = f(\Delta)$ son image par la transformation f .

Représenter de même la transformation de Δ sur une nouvelle figure.

f) Soit C le cercle trigonométrique et $C' = f(C)$ son image.

Représenter de même la transformation de C sur une nouvelle figure.

2) Étude de fonction

Le but de cet exercice est de faire, dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique soignée de la fonction numérique f définie par : $x \mapsto y = \frac{e^x}{x^2+1}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de cette fonction et préciser les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

b) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} f(x)$

c) Établir un tableau dans lequel on résumera variations et valeurs de la fonction f .

d) Faire un second tableau dans lequel on donnera les valeurs exactes et approchées de x , $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ pour les points d'abscisses -1 , 0 , 1 , 2 et 3 .

e) Dessiner soigneusement C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J) . On choisira une unité adaptée.

On précisera les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 0 et 1 .

$$\text{On donne : } e \approx 2,72 ; \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37 ; \quad e^2 \approx 7,39 ; \quad \frac{e^3}{10} \approx 2,01$$



B

TS 1 IRIS : Devoir n° 3

1) Transformation complexe

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ définie ainsi :

$$z \mapsto Z = f(z) = \frac{2i - z}{z - i}$$

a) Soit le point O d'affixe (0) et le point A d'affixe $(1 + i)$.

Déterminer les affixes des images $O' = f(O)$ et $A' = f(A)$.

Placer sur une figure les points O , A , O' et A' sur une même figure.

b) Montrer que l'on peut écrire $f(z)$ sous la forme : $f(z) = \frac{i}{z - i} - 1$

c) Déterminer la nature de la transformation f en la décomposant en transformations élémentaires.

d) Soit D l'axe des réels et $D' = f(D)$ son image par la transformation f .

Représenter pas à pas la transformation de D sur une nouvelle figure *sans oublier de nommer les intermédiaires*.

e) Soit Δ l'axe des imaginaires et $\Delta' = f(\Delta)$ son image par la transformation f .

Représenter de même la transformation de Δ sur une nouvelle figure.

f) Soit C le cercle trigonométrique et $C' = f(C)$ son image.

Représenter de même la transformation de C sur une nouvelle figure.

2) Étude de fonction

Le but de cet exercice est de faire, dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique soignée de la fonction numérique f définie par : $x \mapsto y = \frac{e^x}{x^2}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de cette fonction.

b) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{(x-2)}{x} f(x)$

c) Établir un tableau dans lequel on résumera variations et valeurs de la fonction f .

d) Faire un second tableau dans lequel on donnera les valeurs exactes et approchées de x , $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ pour les points d'abscisses -1 , 1 , 2 et 3 .

e) Dessiner soigneusement C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J) . On choisira une unité adaptée.

On précisera les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 1 et 2 .

$$\text{On donne : } e \approx 2,72 ; \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37 ; \quad e^2 \approx 7,39 ; \quad \frac{e^3}{9} \approx 2,23$$



TS 1 IRIS : Devoir n° 3 Sujet A (Solution)

1) Transformation complexe

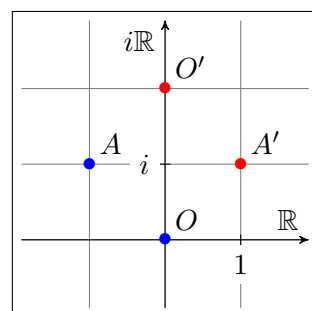
Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ définie ainsi : $z \mapsto Z = f(z) = \frac{i(z+2)}{z+1}$

a) Soit le point O d'affixe (0) et le point A d'affixe $(-1+i)$.

Déterminer les affixes des images $O' = f(O)$ et $A' = f(A)$.

Placer sur une figure les points O, A, O' et A' sur une même figure.

$$\begin{aligned} O &\mapsto O' & f(0) &= 2i \\ A &\mapsto A' & f(-1+i) &= \frac{i(1+i)}{i} = 1+i \end{aligned}$$



b) Montrer que l'on peut écrire $f(z)$ sous la forme : $f(z) = \frac{i}{z+1} + i$ (Par identification)

c) Déterminer la nature de la transformation f en la décomposant en transformations élémentaires.
Décomposition en transformations élémentaires :

$$z \xrightarrow{f_1} z_1 = z + 1 \xrightarrow{f_2} z_2 = \frac{1}{z_1} \xrightarrow{f_3} z_3 = i z_2 \xrightarrow{f_4} Z = f(z) = z_3 + i$$

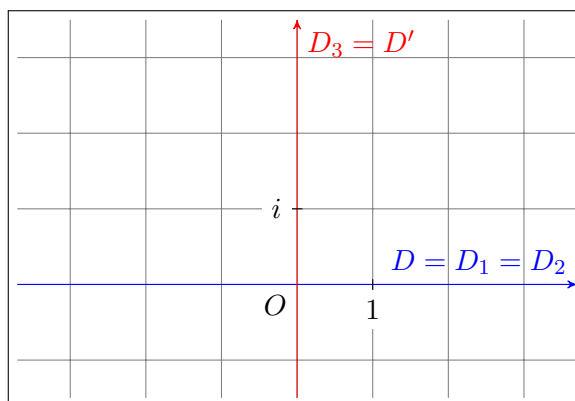
Avec : $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

- f_1 Translation de vecteur d'affixe (1)
- f_2 Inversion Complexe
- f_3 Rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2} = \arg(i)$
- f_4 Translation de vecteur d'affixe (i)

d) Soit D l'axe des réels et $D' = f(D)$ son image par la transformation f .

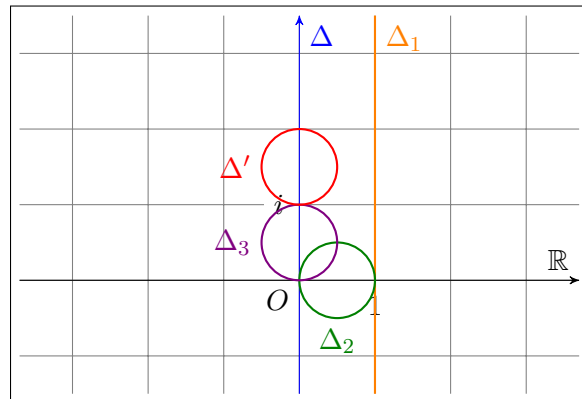
Représenter pas à pas la transformation de D sur une nouvelle figure.

$$D \xrightarrow{f_1} D_1 \xrightarrow{f_2} D_2 \xrightarrow{f_3} D_3 \xrightarrow{f_4} D' = f(D)$$



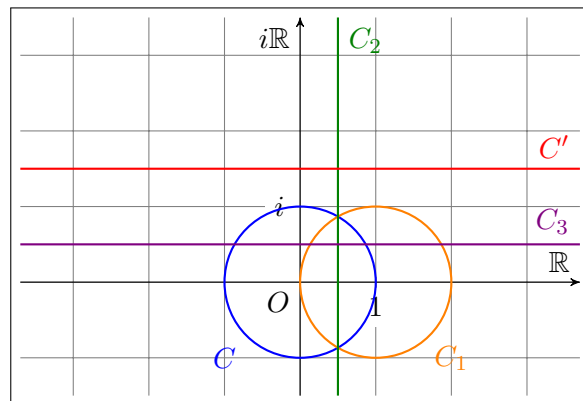
e) Soit Δ l'axe des imaginaires et $\Delta' = f(\Delta)$ son image par la transformation f . Représenter de même la transformation de Δ sur une nouvelle figure.

$$\Delta \xrightarrow{f_1} \Delta_1 \xrightarrow{f_2} \Delta_2 \xrightarrow{f_3} \Delta_3 \xrightarrow{f_4} \Delta' = f(\Delta)$$



f) Soit C le cercle trigonométrique et $C' = f(C)$ son image. Représenter de même la transformation de C sur une nouvelle figure.

$$C \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} C_2 \xrightarrow{f_3} C_3 \xrightarrow{f_4} C' = f(C)$$



2) Étude de fonction

Le but de cet exercice est de faire, dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique soignée de la fonction numérique f définie par : $x \mapsto y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

a) Déterminer D_f le domaine de définition de cette fonction et préciser les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$ intersection avec l'axe Oy : $x = 0 \quad y = f(0) = 1$

b) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)e^x - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-2x+1)e^x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)} \frac{e^x}{(x^2+1)} \quad \text{donc :} \quad f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} f(x) \end{aligned}$$

c) Établir un tableau dans lequel on résumera les variations et valeurs de la fonction f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y		$\frac{e}{2}$	$+\infty$
	0		

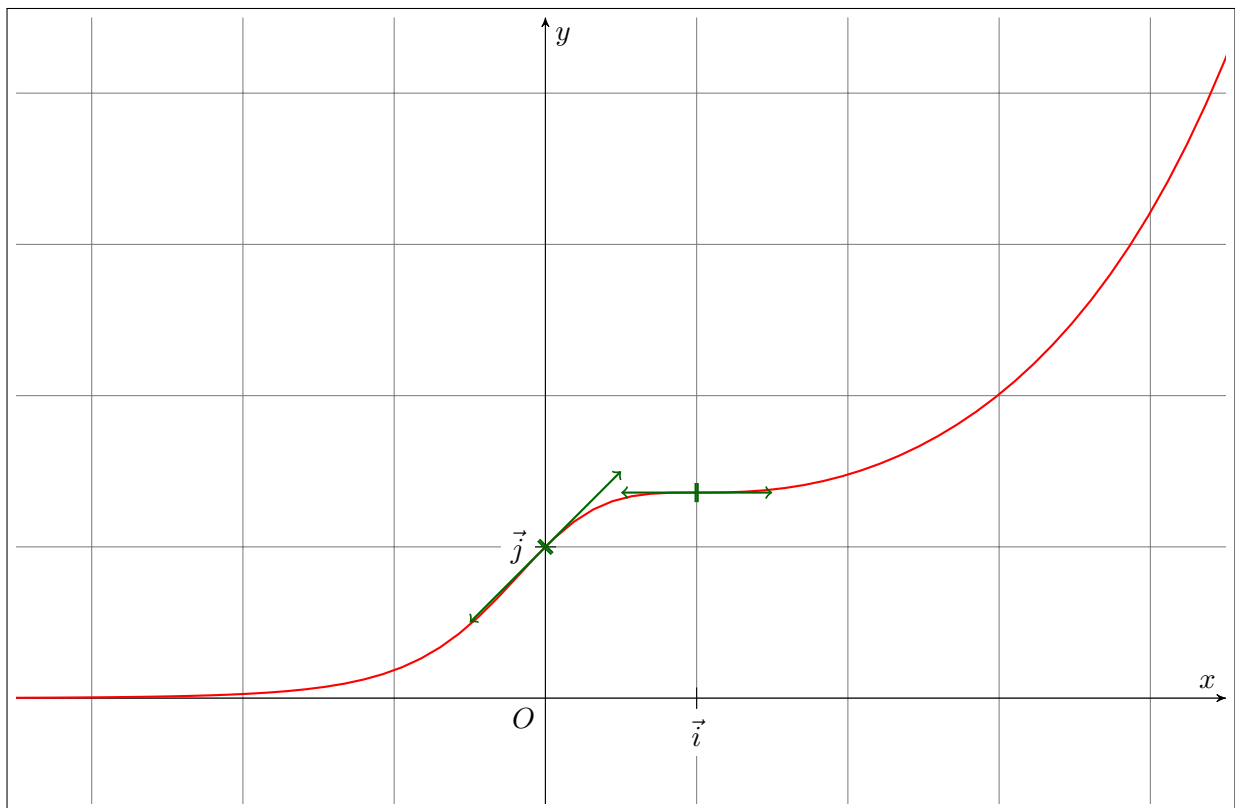
d) Faire un second tableau dans lequel on donnera les valeurs exactes et approchées de x , $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ pour les points d'abscisses -1 , 0 , 1 , 2 et 3 .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2e} \simeq 0,18$	1	$\frac{e}{2} \simeq 1,36$	$\frac{e^2}{5} \simeq 1,48$	$\frac{e^3}{10} \simeq 2,01$
$f'(x)$	$\frac{1}{e} \simeq 0,37$	1	0	$\frac{e^2}{25} \simeq 0,30$	$\frac{e^3}{25} \simeq 0,80$

e) Dessiner soigneusement C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère ortho-normé (O, I, J) . On choisira une unité adaptée.

On précisera les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 0 et 1.

On donne : $e \approx 2,72$; $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$; $e^2 \approx 7,39$; $\frac{e^3}{10} \approx 2,01$



TS 1 IRIS : Devoir n° 3 Sujet B (Solution)

1) Transformation complexe

Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $Z = f(z)$ définie ainsi :

$$z \longmapsto Z = f(z) = \frac{2i - z}{z - i}$$

a) Soit le point O d'affixe (0) et le point A d'affixe $(1 + i)$.

Déterminer les affixes des images $O' = f(O)$ et $A' = f(A)$.

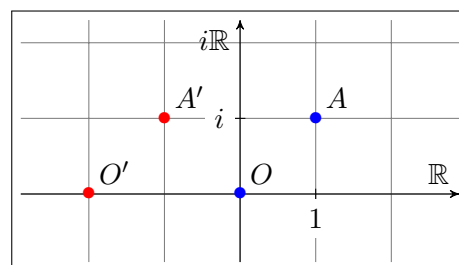
Placer sur une figure les points O, A, O' et A' sur une même figure.

$$O \mapsto O'$$

$$f(0) = -2$$

$$A \mapsto A'$$

$$f(1 + i) = i - 1$$



b) Montrer que l'on peut écrire $f(z)$ sous la forme :

$$f(z) = \frac{i}{z - i} - 1$$

 (Par identification).

c) Déterminer la nature de la transformation f en la décomposant en transformations élémentaires.

Décomposition en transformations élémentaires :

$$z \xrightarrow{f_1} z_1 = z - i \xrightarrow{f_2} z_2 = \frac{1}{z_1} \xrightarrow{f_3} z_3 = i z_2 \xrightarrow{f_4} Z = f(z) = z_3 - 1$$

Avec : $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

f_1 Translation de vecteur d'affixe $(-i)$

f_2 Inversion Complexe

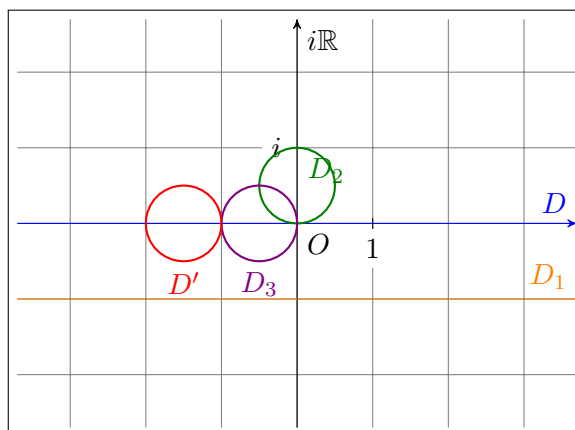
f_3 Rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2} = \arg(i)$

f_4 Translation de vecteur d'affixe (-1)

d) Soit D l'axe des réels et $D' = f(D)$ son image par la transformation f .

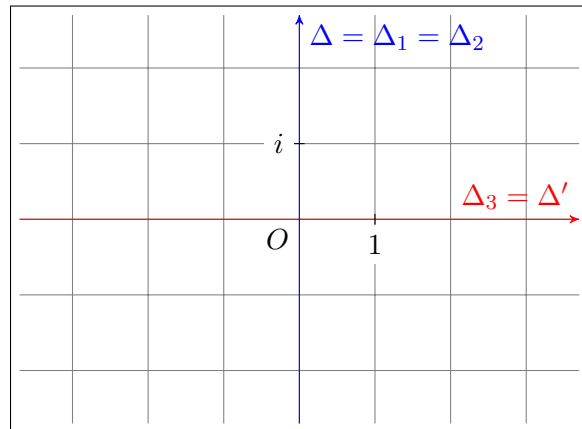
Représenter pas à pas la transformation de D sur une nouvelle figure *sans oublier de nommer les intermédiaires*.

$$D \xrightarrow{f_1} D_1 \xrightarrow{f_2} D_2 \xrightarrow{f_3} D_3 \xrightarrow{f_4} D' = f(D)$$



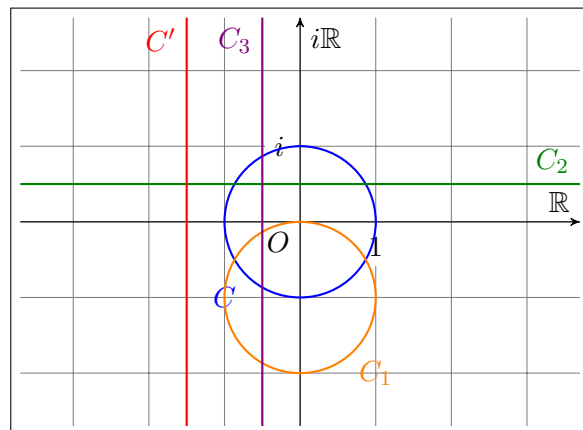
- e) Soit Δ l'axe des imaginaires et $\Delta' = f(\Delta)$ son image par la transformation f .
Représenter de même la transformation de Δ sur une nouvelle figure.

$$\Delta \xrightarrow{f_1} \Delta_1 \xrightarrow{f_2} \Delta_2 \xrightarrow{f_3} \Delta_3 \xrightarrow{f_4} \Delta' = f(\Delta)$$



- f) Soit C le cercle trigonométrique et $C' = f(C)$ son image.
Représenter de même la transformation de C sur une nouvelle figure.

$$C \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} C_2 \xrightarrow{f_3} C_3 \xrightarrow{f_4} C' = f(C)$$



2) Étude de fonction

Le but de cet exercice est de faire, dans un repère orthonormé (O, I, J) une représentation graphique soignée de la fonction numérique f définie par : $x \mapsto y = \frac{e^x}{x^2}$

- a) Déterminer D_f le domaine de définition de cette fonction.

$$\text{Domaine de définition : } \boxed{D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$$

- b) Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme : $f'(x) = \frac{(x-2)}{x} f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{(x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x)e^x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{x^2} \frac{e^x}{x^2} \quad \text{donc : } \boxed{f'(x) = \frac{(x-2)}{x} f(x)} \end{aligned}$$

c) Établir un tableau dans lequel on résumera variations et valeurs de la fonction f .

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'	$+$				$-$	0	$+$
y	0		$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e^2}{4}$	$+\infty$
	$\nearrow$				$\swarrow$	$\longleftrightarrow$	$\nearrow$

d) Faire un second tableau dans lequel on donnera les valeurs exactes et approchées de x , $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ pour les points d'abscisses -1 , 1 , 2 et 3 .

x	-1	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{e} \simeq 0,37$	$e \simeq 2,72$	$\frac{e^2}{4} \simeq 1,85$	$\frac{e^3}{9} \simeq 2,23$
$f'(x)$	$\frac{3}{e} \simeq 1,10$	$-e \simeq -2,72$	0	$\frac{e^3}{27} \simeq 0,74$

e) Dessiner soigneusement C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé (O, I, J) . On choisira une unité adaptée.

On précisera les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 1 et 2 .

On donne : $e \approx 2,72$; $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$; $e^2 \approx 7,39$; $\frac{e^3}{9} \approx 2,23$

