TS 1 IRIS : Sujet A

L'usage de la calculette et du formulaire est interdit dans ce devoir.

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $x'(t) + 2\,t\,x(t) = 4\,t$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $(t^2+1)x'(t) - x(t) = 3$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $x'(t) + x(t) = e^{3t}$ sur $I = \mathbb{R}$

4) $7\,x'(t) + 3\,x(t) = 2\sin(t)$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $t\,x'(t) + x(t) = 5$ sur $I =]-\infty\,;\,0\,[$

6) $x'(t) + 3\,x(t) = 3\,t^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$

7) $x''(t) + 2\,x'(t) + 5\,x(t) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$

8) $x''(t) + 6\,x'(t) + 9\,x(t) = e^{-5t}$ sur $I = \mathbb{R}$

9) $x''(t) + 2\,x'(t) = t + 2$ sur $I = \mathbb{R}$

10) $x''(t) + 4\,x(t) = \cos(3t)e^{-2t}$ sur $I = \mathbb{R}$

TS 1 IRIS : Sujet B

L'usage de la calculette et du formulaire est interdit dans ce devoir.

Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $x'(t) - 3\,t\,x(t) = 6\,t$ sur $I = \mathbb{R}$

2) $(t^2+1)x'(t) - x(t) = 8$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $x'(t) - x(t) = e^{2t}$ sur $I = \mathbb{R}$

4) $3\,x'(t) + 7\,x(t) = 2\sin(t)$ sur $I = \mathbb{R}$

5) $t\,x'(t) - x(t) = 3$ sur $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

6) $x'(t) + 2\,x(t) = 2\,t^2 + t$ sur $I = \mathbb{R}$

7) $x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0$ sur $I = \mathbb{R}$

8) $x''(t) - 6\,x'(t) + 9\,x(t) = e^{-4t}$ sur $I = \mathbb{R}$

9) $x''(t) + 3\,x'(t) = t - 3$ sur $I = \mathbb{R}$

10) $x''(t) + 4\,x(t) = \cos(3t)e^{-2t}$ sur $I = \mathbb{R}$

TS 1 IRIS : Sujet A (Solutions)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1)

$x'(t) + 2\,t\,x(t) = 4\,t$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto 2t$ a pour primitive $t \mapsto t^2$

donc : $x(t) = ke^{-t^2}$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = 2$ solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{-t^2} + 2}$$

2)

$(t^2+1)x'(t) - x(t) = 3$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto -\dfrac{1}{t^2+1}$ a pour primitive $t \mapsto -\arctan(t)$

donc : $x(t) = ke^{\arctan(t)}$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = -3$ solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{\arctan(t)} - 3}$$

3)

$x'(t) + x(t) = e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto 1$ a pour primitive $t \mapsto t$

donc : $x(t) = ke^{-t}$ solution générale de l'équation sans second membre

par identification on obtient $x(t) = \frac{1}{4}e^{3t}$ solution particulière de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}}$$

4)

$7\,x'(t) + 3\,x(t) = 2\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{3}{7}$ a pour primitive $t \mapsto \frac{3}{7}t$

donc : $x(t) = ke^{-\frac{3}{7}t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{c|rcl} 3 & x(t) & = & a\sin(t) + b\cos(t) \\ 7 & x'(t) & = & a\cos(t) - b\sin(t) \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3a - 7b & = & 2 \\ 7a + 3b & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{3}{29} \\ b & = & -\dfrac{7}{29} \end{array}\right.$$

$$\boxed{x(t) = ke^{-\frac{3}{7}t} + \frac{3}{29}\sin(t) - \frac{7}{29}\cos(t)}$$

---

5)

$t\,x'(t) + x(t) = 5$ sur $]-\infty\,;\,0\,[$

$$t \mapsto \frac{1}{t} \quad \text{a pour primitive} \quad t \mapsto \ln(t)$$

donc : $x(t) = ke^{-\ln(t)} = \dfrac{k}{t}$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = 5$ est solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = \frac{k}{t} + 5}$$

---

6)

$x'(t) + 3\,x(t) = 3\,t^2 + 1$ sur $\mathbb{R}x'(t) + 3\,x(t) = 0 \quad r^2$

$$t \mapsto 3 \quad \text{a pour primitive} \quad t \mapsto 3\,t$$

donc : $x(t) = ke^{-3\,t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{c|rcl} 3 & x(t) & = & a\,t^2 + b\,t + c \\ & & & \\ 1 & x'(t) & = & 2a\,t + b \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 3 \\ 3b + 2a & = & 0 \\ 3c + b & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -\dfrac{2}{3} \\ c & = & \dfrac{5}{9} \end{array}\right.$$

$$\boxed{x(t) = ke^{-3t} + t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{9}}$$

---

7)

$x''(t) + 2\,x'(t) + 5\,x(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \qquad \text{solutions :} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & -1 + 2i \\ r_2 & = & -1 - 2i \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{x(t) = e^{-t}\big(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\big)}$$

---

8)

$x''(t) + 6\,x'(t) + 9\,x(t) = e^{-5t}$ sur $\mathbb{R}$

$$r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0 \qquad \text{solution double :} \qquad r_0 = -3$$

donc : $x(t) = (\lambda t + \mu)e^{-3t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcl} 9 & x(t) & = & k\,e^{-5t} \\ 6 & x'(t) & = & -5k\,e^{-5t} \\ 1 & x''(t) & = & 25k\,e^{-5t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (9k-30k+25k)e^{-5t} & = & e^{-5t} \\ 4k & = & 1 \\ k & = & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

$$\boxed{x(t) = (\lambda t + \mu)e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-5t}}$$

---

9)

$$x''(t) + 2\,x'(t) = t + 2 \qquad x(t) = Ae^{-2t} + \frac{t^2}{4} + \frac{3t}{4} + B \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$r^2 + 2r = r(r+2) = 0 \qquad \text{solutions :} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} r_1 & = & -2 \\ r_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

donc : $x(t) = \lambda\,e^{-2t} + \mu$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcr} 0 & x(t) & = & a\,t^2 + b\,t + c \\ 2 & x'(t) & = & 2a\,t + b \\ 1 & x''(t) & = & 2a \end{array} \qquad 4a\,t + 2b + 2a = t + 2 \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 4a & = & 1 \\ 2b + 2a & = & 2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{1}{4} \\ b & = & \dfrac{3}{4} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-2t} + \frac{t^2}{4} + \frac{3t}{4} + \mu}$$

---

10)

$$x''(t) + 4\,x(t) = \cos(3t)e^{-2t} \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$r^2 + 4 = 0 \qquad \text{solutions :} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} r_1 & = & 2i \\ r_2 & = & -2i \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 2 \end{array} \right.$$

donc : $x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche une solution particulière de l'équation complète par identification daans $\mathbb{C}$.

$$\cos(3t)e^{-2t} = \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}e^{-2t} = \frac{e^{3it}e^{-2t} + e^{-3it}e^{-2t}}{2} = \frac{e^{(-2+3i)t}}{2} + \frac{e^{(-2-3i)t}}{2}$$

$\dfrac{e^{(-2+3i)t}}{2}$ et $\dfrac{e^{(-2-3i)t}}{2}$ sont deux valeurs conjuguées.

On cherche donc simplement une solution particulière de l'équation :

$$x''(t) + 4\,x(t) = \frac{1}{2}e^{(-2+3i)t}$$

$$\begin{array}{c|rcl} 4 & x_1(t) & = & k\,e^{(-2+3i)t} \\ 0 & x_1'(t) & = & (-2+3i)k\,e^{(-2+3i)t} \\ 1 & x_1''(t) & = & (-5-12i)k\,e^{(-2+3i)t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (4-5-12i)k\,e^{(-2+3i)t} & = & \frac{1}{2}e^{(-2+3i)t} \\ (-1-12i)k & = & \frac{1}{2} \\ k & = & \frac{1}{-1-12i} \end{array}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} + \frac{12}{145}i\right)e^{(-2+3i)t}$$

On repasse dans $\mathbb{R}$:

$$x(t) = x_1(t) + \overline{x_1(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} + \frac{12}{145}i\right)e^{(-2+3i)t} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} - \frac{12}{145}i\right)e^{(-2-3i)t}$$

$$x(t) = \left(-\frac{1}{145}\cos(3t) - \frac{12}{145}\sin(3t)\right)e^{-2t}$$

$$\boxed{x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - \frac{\cos(3t)+12\sin(3t)}{145}e^{-2t}}$$

TS 1 IRIS : Sujet B (Solutions)

Résoudre les équations différentielles suivantes

1)

$x'(t) - 3\,t\,x(t) = 6\,t$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto -3t$ a pour primitive $t \mapsto -\dfrac{3t^2}{2}$

donc : $x(t) = ke^{\frac{3}{2}t^2}$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = -2$ solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{\frac{3}{2}t^2} - 2}$$

2)

$(t^2+1)x'(t) - x(t) = 8$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto -\dfrac{1}{t^2+1}$ a pour primitive $t \mapsto -\arctan(t)$

donc : $x(t) = ke^{\arctan(t)}$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = -8$ solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{\arctan(t)} - 8}$$

---

3)

$x'(t) - x(t) = e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto -1$ a pour primitive $t \mapsto -t$

donc : $x(t) = ke^{t}$ solution générale de l'équation sans second membre

par identification on obtient $x(t) = e^{2t}$ solution particulière de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = ke^{-t} + e^{2t}}$$

---

4)

$3\,x'(t) + 7\,x(t) = 2\sin(t)$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \frac{3}{7}$ a pour primitive $t \mapsto \frac{3}{7}t$

donc : $x(t) = ke^{-\frac{3}{7}t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcl} 7 & x(t) & = & a\sin(t) + b\cos(t) \\ 3 & x'(t) & = & a\cos(t) - b\sin(t) \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 7a - 3b & = & 2 \\ 3a + 7b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{7}{29} \\ b & = & -\dfrac{}{29} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x(t) = ke^{-\frac{7}{3}t} + \frac{7}{29}\sin(t) - \frac{3}{29}\cos(t)}$$

---

5)

$t\,x'(t) - x(t) = 3$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ a pour primitive $t \mapsto -\ln(t)$

donc : $x(t) = ke^{\ln(t)} = k\,t$ solution générale de l'équation sans second membre

$x(t) = -3$ est solution particulière évidente de l'équation complète

$$\boxed{x(t) = k\,t - 3}$$

---

6)

$x'(t) + 2\,x(t) = 2\,t^2 + t$ sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto 2$ a pour primitive $t \mapsto 2\,t$

donc : $x(t) = ke^{-2\,t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcl} 2 & x(t) & = & a\,t^2 + b\,t + c \\ 1 & x'(t) & = & 2a\,t + b \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & 2 \\ 2b + 2a & = & 1 \\ 2c + b & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -\dfrac{1}{2} \\ c & = & \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x(t) = ke^{-2t} + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}}$$

---

7)

$$x''(t) + 2\,x'(t) + 10\,x(t) = 0 \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$r^2 + 2r + 105 = 0 \qquad \text{solutions :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & -1+3i \\ r_2 & = & -1-3i \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{x(t) = e^{-t}\big(\lambda\cos(3t) + \mu\sin(3t)\big)}$$

---

8)

$$x''(t) - 6\,x'(t) + 9\,x(t) = e^{-4t} \qquad x(t) = (At+B)e^{3t} + \tfrac{1}{49}e^{-4t} \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0 \qquad \text{solution double :} \qquad r_0 = -$$

donc : $x(t) = (\lambda t + \mu)e^{3t}$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcl} 9 & x(t) & = & k\,e^{-4t} \\ -6 & x'(t) & = & -4k\,e^{-4t} \\ 1 & x''(t) & = & 16k\,e^{-4t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (9k+24k+16k)e^{-4t} & = & e^{-4t} \\ 49k & = & 1 \\ k & = & \dfrac{1}{49} \end{array}$$

$$\boxed{x(t) = (\lambda t + \mu)e^{3t} + \frac{1}{49}e^{-4t}}$$

---

9)

$$x''(t) + 3\,x'(t) = t - 3 \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$r^2 + 3r = r(r+3) = 0 \qquad \text{solutions :} \quad \left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & -3 \\ r_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

donc : $x(t) = \lambda\,e^{-3t} + \mu$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche par identification une solution particulière de l'équation complète

$$\begin{array}{r|rcl} 0 & x(t) & = & a\,t^2 + b\,t + c \\ 3 & x'(t) & = & 2a\,t + b \\ 1 & x''(t) & = & 2a \end{array} \qquad 6a\,t + 3b + 2a = t + 2 \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 6a & = & 1 \\ 3b + 2a & = & -3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{1}{6} \\ b & = & -\dfrac{10}{9} \end{array}\right.$$

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-3t} + \frac{t^2}{6} - \frac{10t}{9} + \mu}$$

10)

$x''(t) + 4\,x(t) = \cos(3t)e^{-2t}$ sur $\mathbb{R}$

$$r^2 + 4 = 0 \qquad \text{solutions :} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} r_1 & = & 2i \\ r_2 & = & -2i \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 2 \end{array}\right.$$

donc : $x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ solution générale de l'équation sans second membre

On cherche une solution particulière de l'équation complète par identification daans $\mathbb{C}$.

$$\cos(3t)e^{-2t} = \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}e^{-2t} = \frac{e^{3it}e^{-2t} + e^{-3it}e^{-2t}}{2} = \frac{e^{(-2+3i)t}}{2} + \frac{e^{(-2-3i)t}}{2}$$

$\dfrac{e^{(-2+3i)t}}{2}$ et $\dfrac{e^{(-2-3i)t}}{2}$ sont deux valeurs conjuguées.

On cherche donc simplement une solution particulière de l'équation :

$$x''(t) + 4\,x(t) = \frac{1}{2}e^{(-2+3i)t}$$

$$\begin{array}{c|lcl} 4 & x_1(t) & = & k\,e^{(-2+3i)t} \\ 0 & x_1'(t) & = & (-2+3i)k\,e^{(-2+3i)t} \\ 1 & x_1''(t) & = & (-5-12i)k\,e^{(-2+3i)t} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (4-5-12i)k\,e^{(-2+3i)t} & = & \dfrac{1}{2}e^{(-2+3i)t} \\ (-1-12i)k & = & \dfrac{1}{2} \\ k & = & \dfrac{1}{-1-12i} \end{array}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} + \frac{12}{145}i\right)e^{(-2+3i)t}$$

On repasse dans $\mathbb{R}$:

$$x(t) = x_1(t) + \overline{x_1(t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} + \frac{12}{145}i\right)e^{(-2+3i)t} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{145} - \frac{12}{145}i\right)e^{(-2-3i)t}$$

$$x(t) = \left(-\frac{1}{145}\cos(3t) - \frac{12}{145}\sin(3t)\right)e^{-2t}$$

$$\boxed{x(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - \frac{\cos(3t) + 12\sin(3t)}{145}e^{-2t}}$$