Exercices sur les Polynômes

1) Effectuer $f(x) + g(x)$ et $f(x) \times g(x)$ pour les polynômes suivants :

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **et** $g(x) = 2x^2 + 3x + 8$

b) $f(x) = 5x + 3$ **et** $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 8$

c) $f(x) = x^5 + 5x^2 - x + 2$ **et** $g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 5$

d) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ **et** $g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

2) Factoriser les polynômes suivants :

a) $p(x) = x^4 - 4x^2$

b) $p(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

d) $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

e) $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

f) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

3) Résoudre ces équations, dont les solutions sont « évidentes »

a) $4x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $x^2 + 3x - 4 = 0$

e) $12x^2 - 7x - 5 = 0$

f) $x^2 + 7x + 12 = 0$

g) $x^2 - 7x + 10 = 0$

h) $x^2 + x - 12 = 0$

i) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

j) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

4) Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne du polynôme $f(x)$ par le polynôme $g(x)$

Écrire ensuite la fraction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

– soit sous forme simplifiée factorisée

– soit comme somme d'un polynôme et d'une fraction irréductible

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x + 4$ **et** $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ **et** $g(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 9$ **et** $g(x) = x - 3$

d) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ **et** $g(x) = 2x - 1$

e) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$ **et** $g(x) = x^2 + x - 2$

Exercices sur les Polynômes (Solutions)

Exercices à faire et à refaire pour s'entraîner.
Le calcul sur les polynômes est à la base de tous les autres types de calculs.

1) Effectuer $f(x)+g(x)$ et $f(x)\times g(x)$ pour les polynômes suivants :

a) $f(x)=x^2-2x+3$ **et** $g(x)=2x^2+3x+8$
$f(x)+g(x)=3x^2+x+11$
$f(x)\times g(x)=2x^4-x^3+8x^2-7x+24$

b) $f(x)=5x+3$ **et** $g(x)=x^3-2x^2+3x+8$
$f(x)+g(x)=x^3-2x^2+8x+11$
$f(x)\times g(x)=5x^4-7x^3+9x^2+49x+24$

c) $f(x)=x^5+5x^2-x+2$ **et** $g(x)=x^4+2x^3-x^2+5$
$f(x)+g(x)=x^5+x^4+2x^3+4x^2-x+7$
$f(x)\times g(x)=x^9+2x^8-x^7+5x^6+14-5x^4+5x^3+23x^2-5x+10$

d) $f(x)=2x^4-x^3+3x^2-x+1$ **et** $g(x)=x^4-x^3-2x^2+3x-4$
$f(x)+g(x)=3x^4-2x^3+x^2+2x-3$
$f(x)\times g(x)=2x^8-3x^7+4x^5-15x^4+14x^3-17x^2+7x-4$

2) Factoriser les polynômes suivants :

a) $p(x)=x^4-4x^2$
$p(x)=x^2(x+2)(x-2)$

b) $p(x)=x^2-4x+3$
$p(x)=(x-3)(x-1)$

c) $p(x)=x^3-5x^2+6x$
$p(x)=x(x-3)(x-2)$

d) $p(x)=x^3-2x^2-x+2$
$p(x)=(x-2)(x-1)(x+1)$

e) $p(x)=x^3-x^2-4x+4$
$p(x)=(x-2)(x-1)(x+2)$

f) $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$
$p(x)=(x-3)(x-1)(x+2)$

3) Résoudre ces équations, dont les solutions sont « évidentes »

a) $4x^2-2x=0$ $4x^2-2x=2x(2x-1)=0$ donc : $x=0$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

b) $x^2-5x+6=0$ $5=2+3$ et $6=2\times 3$ donc : $x=2$ ou $x=3$

c) $x^2-5x+4=0$ $1-5+4=0$ et $4=1\times 4$ donc : $x=1$ ou $x=4$

d) $x^2+3x-4=0$ $1+3-4=0$ donc : $x=1$ ou $x=-4$

e) $12x^2-7x-5=0$ $12-7-5=0$ donc : $x=1$ ou $x=-\dfrac{5}{12}$

f) $x^2 + 7x + 12 = 0$ $\quad -7 = -3 - 4$ et $12 = (-3) \times (-4)$ donc : $x = -3$ ou $x = -4$

g) $x^2 - 7x + 10 = 0$ $\quad 7 = 2 + 5$ et $10 = 2 \times 5$ donc : $x = 2$ ou $x = 5$

h) $x^2 + x - 12 = 0$
$-1 = 3 - 4$ et $-12 = 3 \times (-4)$ donc : $x = 3$ ou $x = -4$

i) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$
Somme et produits «évidents» donc : $x = 1$ ou $x = \sqrt{2}$

j) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$
Somme et produits «évidents» donc : $x = -\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{3}$

4) Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne du polynôme $f(x)$ par le polynôme $g(x)$
Écrire ensuite la fraction $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
– soit sous forme simplifiée factorisée
– soit comme somme d'un polynôme et d'une fraction irréductible

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x + 4$ **et** $g(x) = x + 2$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 7x^2 + 12x + 4}{x + 2} = x^2 + 5x + 2$$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ **et** $g(x) = x + 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x^3 + x^2 + 2$$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 9$ **et** $g(x) = x - 3$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 6x - 9}{x - 3} = x^3 - x^2 - x + 3$$

d) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ **et** $g(x) = 2x - 1$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{2x - 1} = x^2 + x - 1 + \frac{3}{2x - 1}$$

Voir paragraphe suivant un exemple de division euclidienne effectuée en détail.

e) $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x - 4$ **et** $g(x) = x^2 + x - 2$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^3 + 5x^2 - 4x - 4}{x^2 + x - 2} = 3x + 2$$

5) Exemple de division euclidienne

Premier terme du quotient : x^2

$$\begin{array}{rrrr|ll} 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & 2x & -1 \\ \cline{5-6} 2x^3 & -x^2 & & & x^2 & \end{array}$$

Soustraction de $(2x^3 - x^2)$

$$\begin{array}{rrrrr|ll} & 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & 2x & -1 \\ \cline{6-7} - & (2x^3 & -x^2) & & & x^2 & \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & -3x & +4 & & \end{array}$$

Second terme du quotient : x

$$\begin{array}{rrrrr|ll} & 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & 2x & -1 \\ \cline{6-7} - & (2x^3 & -x^2) & & & x^2 & +x \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & -3x & +4 & & \\ & & 2x^2 & -x & & & \end{array}$$

Soustraction de $(2x^2 - x)$

$$\begin{array}{rrrrr|ll} & 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & 2x & -1 \\ \cline{6-7} - & (2x^3 & -x^2) & & & x^2 & +x \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & -3x & +4 & & \\ & - & (2x^2 & -x) & & & \\ \cline{3-4} & & & -2x & +4 & & \end{array}$$

... etc ...

$$\begin{array}{rrrrr|lll} & 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & 2x & -1 & \\ \cline{6-8} - & (2x^3 & -x^2) & & & x^2 & +x & -1 \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & -3x & +4 & & & \\ & - & (2x^2 & -x) & & & & \\ \cline{3-4} & & & -2x & +4 & & & \\ & & & -2x & +1 & & & \end{array}$$

... reste 3

$$\begin{array}{rrrrrr|lll} & 2x^3 & +x^2 & -3x & +4 & & 2x & -1 & \\ \cline{7-9} - & (2x^3 & -x^2) & & & & x^2 & +x & -1 \\ \cline{2-3} & & 2x^2 & -3x & +4 & & & & \\ & - & (2x^2 & -x) & & & & & \\ \cline{3-4} & & & -2x & +4 & & & & \\ & & - & (-2x & +1) & & & & \\ \cline{4-5} & & & & 3 & & & & \end{array}$$

Réponse : $$\frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{2x - 1} = x^2 + x - 1 + \frac{3}{2x - 1}$$