Exercices sur les Équations Différentielles

Dans tous les exercices on recherche une fonction x de la variable réelle t : $t \mapsto x(t)$

et on note indifféremment $x' = x'(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}$ et $x'' = x''(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2}$

Résoudre chaque équation différentielle sur l'intervalle I proposé.

1) $t\,x'(t) - x(t) = 0$ avec: $I = \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$

2) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + x(t)\cos(t) = 0$ avec: $I = \mathbb{R}$

3) $t\,x'(t) - x(t) = t^2\sin(t)$ avec: $I = \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$

4) $(t-2)x'(t) - x(t) = t(t-1)^3$ avec: $I = \left]\,2\,;\,+\infty\,\right[$

5) $x'(t) + x(t)\tan(t) = -2\,\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ avec: $I = \left]\,0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\,\right[$

6) $x'(t) - 2x(t) = 5\,\cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

7) $x'(t) + 4x(t) = 5\,e^{2t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

8) $t\,x'(t) + (1+t)x(t) = 0$ avec: $I = \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$

9) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 9x(t) = \cos(t)\,e^{3t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

10) $x''(t) + x'(t) + x(t) = e^{-t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

11) $x''(t) + x(t) = \sin(2t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

12) $(1-t^2)\,x'(t) + 2t\,x(t) = 4t$ avec: $I = \left]\,0\,;\,1\,\right[$

13) $x'(t) - 2t\,x(t) = \left(e^t\right)^t$ avec: $I = \mathbb{R}$

14) $x''(t) - 9x(t) = 6\cos(3t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

15) $(t^2+1)\,x'(t) + t\,x(t) = 2t^2+1$ avec: $I = \mathbb{R}$

16) $x''(t) - 4x(t) = t^2+1$ avec: $I = \mathbb{R}$

17) $t\,x'(t) + 2t - x(t) = 0$ avec: $I = \left]\,0\,;\,+\infty\,\right[$

18) $t\,x'(t) = x(t) + t^2$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

19) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = t\,e^{-3t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

20) $x''(t) - x(t) = 3e^{-2t} + t^2 + 1$ avec: $I = \mathbb{R}$

21) $t\,x'(t) + 2x(t) = t^2$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

22) $\dfrac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2} - 4x(t) = 3e^{-t} - t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$

23) $x''(t) + x(t) = e^t\cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

24) $t^2\,x'(t) = x(t)$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

25) $(t^2+1)\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = 2t$ avec: $I = \mathbb{R}$

26) $x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 3e^{-2t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

27) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 5e^{-t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

28) $\dfrac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 2x(t) = e^t\cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

29) $x'(t) - 2t^2x(t) = 3t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$

30) $x'(t) + \sin(t)x(t) = \sin(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

31) $x''(t) + x'(t) + x(t) = t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$

32) $x'(t) + \sin(t)x(t) = e^{\cos(t)}$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équations Différentielles (Solutions)

Solution générale de chaque équation différentielle sur l'intervalle I proposé.

---

1) $t\,x'(t) - x(t) = 0$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre sans second membre :

Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t}$ est : $-\ln(t)$, donc la solution est :

$$x(t) = k\,e^{\ln(t)} \qquad \text{donc :} \qquad \boxed{x(t) = k\,t}$$

---

2) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + x(t)\cos(t) = 0$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre sans second membre :

Une primitive sur I de $\cos(t)$ est : $\sin(t)$, donc la solution est :

$$\boxed{x(t) = k\,e^{\sin(t)}}$$

---

3) $t\,x'(t) - x(t) = t^2\sin(t)$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t}$ est : $-\ln(t)$, donc la solution générale de l'équation sans second membre :

$$x(t) = k\,e^{\ln(t)} = k\,t$$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|rcl} (-1) & x(t) & = & k(t)\times t \\ (t) & x'(t) & = & k'(t)\times t + k(t) \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} t\big(k'(t)\times t + k(t)\big) - \big(k(t)\times t\big) &= t^2\sin(t) \\ t^2\,k'(t) &= t^2\sin(t) \\ k'(t) &= \sin(t) \\ k(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -t\,\cos(t)$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = k\,t - t\,\cos(t)}$$

4) $(t-2)x'(t) - x(t) = t(t-1)^3$ avec: $I = \left]\, 2\,;\, +\infty\, \right[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t-2}$ est : $-\ln(t-2)$, donc la solution générale de l'équation sans second membre :

$$x(t) = k\, e^{\ln(t-2)} = k\,(t-2)$$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|lcl} (-1) & x(t) & = & k(t)(t-2) \\ (t-2) & x'(t) & = & k'(t)(t-2) + k(t) \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} (t-2)\big(k'(t)(t-2) + k(t)\big) - \big(k(t)(t-2)\big) &= t(t-1)^3 \\ (t-2)^2\, k'(t) &= t(t-1)^3 \\ k'(t) &= \frac{t(t-1)^3}{(t-2)^2} = t^2 + t + 3 + \frac{2}{(t-2)^2} + \frac{7}{t-2} \\ k(t) &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t - \frac{2}{t-2} + 7\ln(t-2) \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc :

$$x(t) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t - \frac{2}{t-2} + 7\ln(t-2)\right)\,(t-2)$$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = x(t) = \left(k + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t - \frac{2}{t-2} + 7\ln(t-2)\right)\,(t-2)}$$

---

5) $x'(t) + x(t)\tan(t) = -2\,\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ avec: $I = \left]\, 0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\, \right[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre réécrite ainsi :

$$x'(t) + x(t)\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -2\,\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

a) Une primitive sur I de $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$ est : $-\ln\big(\cos(t)\big)$, donc la solution générale de l'équation sans second membre :

$$x(t) = k\, e^{\ln\big(\cos(t)\big)} = k\ \cos(t)$$

b) Solution particulière «èvidente» de l'équation complète : $x(t) = -2$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = k\ \cos(t) - 2}$$

---

6) $x'(t) - 2x(t) = 5\ \cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de -2 est : $-2t$, donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\, e^{2t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcl} (-2) & x(t) & = & a\cos(t) + b\sin(t) \\ (1) & x'(t) & = & -a\sin(t) + b\cos(t) \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \big(-a\sin(t) + b\cos(t)\big) - 2\big(a\cos(t) + b\sin(t)\big) &= 5\cos(t) \\ (2a+b)\cos(t) + (-a-2b)\sin(t) &= 5\cos(t) \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2a + b & = & 5 \\ -a - 2b & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} a & = & -2 \\ b & = & 1 \end{array}\right.$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc :

$$x(t) = -2\cos(t) + \sin(t)$$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = k\, e^{2t} - 2\cos(t) + \sin(t)}$$

---

7) $x'(t) + 4x(t) = 5\, e^{2t}$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de 4 est : $4t$, donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\, e^{-4t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcl} (4) & x(t) & = & ae^{2t} \\ (1) & x'(t) & = & 2ae^{2t} \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \big(4ae^{2t} + 2ae^{2t} &= 5e^{2t} \\ 6ae^{2t} &= 5e^{2t} \\ a &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = \dfrac{5}{6}e^{2t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = k\,e^{-4t} + \frac{5}{6}e^{2t}}$$

---

8) $t\,x'(t) + (1+t)x(t) = 0$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre sans second membre :

Une primitive sur I de $\dfrac{1+t}{t} = \dfrac{1}{t} + 1$ est : $\ln(t) + t$, donc la solution est :

$$x(t) = k\,e^{-\ln(t)-t} \qquad \text{donc :} \qquad \boxed{x(t) = k\frac{e^{-t}}{t}}$$

---

9) $\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 9x(t) = \cos(t)\,e^{3t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de 9 est : $9t$, donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{-9t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcl} (9) & x(t) & = & \big(a\cos(t) + b\sin(t)\big)e^{3t} \\ (1) & x'(t) & = & \big(-a\sin(t) + b\cos(t)\big)e^{3t} + 3\big(a\cos(t) + b\sin(t)\big)e^{3t} \end{array}$$

Par identification :

$$\big((12a+b)\cos(t) + (-a+12b)\sin(t)\big)e^{3t} = \cos(t)e^{3t}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 12a + b & = & 1 \\ -a + 12b & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{12}{145} \\ b & = & \dfrac{1}{145} \end{array}\right.$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = \dfrac{1}{145}\big(12\cos(t) + \sin(t)\big)e^{3t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = k\,e^{-9t} + \frac{1}{145}\big(12\cos(t) + \sin(t)\big)e^{3t}}$$

---

10) $x''(t) + x'(t) + x(t) = e^{-t}$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + r + 1 = 0$ avec : $\Delta = -3$, et : $r = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
donc : $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ La solution générale de l'équation sans second menbre est :

$$x(t) = \left(\lambda\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{1}{2}t}$$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (1) & x(t) & = & ae^{-t} \\ (1) & x'(t) & = & -ae^{-t} \\ (1) & x''(t) & = & ae^{-t} \end{array}$$

Par identification : $ae^{-t} - ae^{-t} + ae^{-t} = e^{-t}$ donc : $a = 1$
Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = e^{-t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \left(\lambda\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-t}}$$

---

11) $x''(t) + x(t) = \sin(2t)$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$ avec : $\Delta = -4$, et : $r = \pm i$ donc : $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ La solution générale de l'équation sans second menbre est :

$$x(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (1) & x(t) & = & a\cos(2t) + b\sin(2t) \\ (0) & x'(t) & = & -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t) \\ (1) & x''(t) & = & -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t) \end{array}$$

Par identification : $-3a\cos(2t) - 3b\sin(2t) = \sin(2t)$ donc : $a = 0$ $b = -\dfrac{1}{3}$
Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -\dfrac{1}{3}\sin(2t)$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) - \frac{1}{3}\sin(2t)}$$

---

12) $(1-t^2)\,x'(t) + 2t\,x(t) = 4t$ avec: $I =]\,0\,;\,1\,[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $-\dfrac{2t}{1-t^2}$ est : $-\ln(1-t^2)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{\ln(1-t^2)} = k\,(1-t^2)$

b) Une solution particulière «évidente» de l'équation complète est : $x(t) = 2$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = k(1-t^2) + 2}$$

---

13) $x'(t) - 2t\,x(t) = (e^t)^t$ avec: $I = \mathbb{R}$

$$x(t) = (k+t)e^{t^2}$$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $-2t$ est : t^2 donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{t^2}$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|rcl} (-2t) & x(t) & = & k(t)e^{t^2} \\ (1) & x'(t) & = & k'(t)e^{t^2} + 2t\,k(t)e^{t^2} \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} k'(t)e^{t^2} + 2t\,k(t)e^{t^2} - 2t\,k(t)e^{t^2} &= e^{t^2} \\ k'(t) &= 1 \\ k(t) &= t \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = t\,e^{t^2}$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = (k+t)\,e^{t^2}}$$

---

14) $x''(t) - 9x(t) = 6\cos(3t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 - 9 = 0$ avec : $\Delta = 36$, $r_1 = -3$ et $r_2 = 3$
La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda e^{-3t} + \mu e^{3t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (-9) & x(t) & = & a\cos(3t) \\ (0) & x'(t) & = & -3a\sin(3t) \\ (1) & x''(t) & = & -9a\cos(3t) \end{array}$$

Par identification : $-18a\cos(3t) = 6\cos(3t)$ donc : $a = -\dfrac{1}{3}$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -\dfrac{1}{3}\cos(3t)$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-3t} + \mu e^{3t} - \frac{1}{3}\cos(3t)}$$

---

15) $(t^2+1)\,x'(t) + t\,x(t) = 2t^2+1$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $\dfrac{t}{t^2+1}$ est : $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = \dfrac{k}{\sqrt{t^2+1}}$

b) Une solution particulière «évidente» de l'équation complète est : $x(t) = t$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = \frac{k}{\sqrt{t^2+1}} + t}$$

---

16) $x''(t) - 4x(t) = t^2+1$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 - 4 = 0$ avec : $\Delta = 16,\ r_1 = -2$ et $r_2 = 2$

La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (-4) & x(t) & = & at^2+bt+c \\ (0) & x'(t) & = & 2a\,t+b \\ (1) & x''(t) & = & 2a \end{array}$$

Par identification : $-4a\,t^2 - 4b\,t - 4c + 2a = t^2+1$ donc : $a = -\dfrac{1}{4}$ $b = 0$ $c = -\dfrac{3}{8}$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -\dfrac{t^2}{4} - \dfrac{3}{8}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{3}{8}}$$

---

17) $t\,x'(t) + 2t - x(t) = 0$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre : $t\,x'(t) - x(t) = -2t$

a) Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t}$ est : $-\ln(t)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{\ln(t)} = k\,t$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|rcl} (-1) & x(t) & = & k(t)\,t \\ (t) & x'(t) & = & k'(t)\,t + k(t) \end{array}$$

Par identification :

$$k'(t)\,t^2 + t\,k(t) - k(t)\,t = -2t$$

$$k'(t) = -\frac{2}{t} \qquad\qquad k(t) = -2\ln(t)$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -2\,t\ln(t)$

c) La solution générale de l'équation complète est donc : $\boxed{x(t) = k\,t - 2\,t\ln(t)}$

---

18) $t\,x'(t) = x(t) + t^2$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre : $t\,x'(t) - x(t) = t^2$

a) Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t}$ est : $-\ln(t)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{\ln(t)} = k\,t$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|rcl} (-1) & x(t) & = & k(t)\,t \\ (t) & x'(t) & = & k'(t)\,t + k(t) \end{array}$$

Par identification :

$$k'(t)\,t^2 + t\,k(t) - k(t)\,t = t^2$$

$$k'(t) = 1 \qquad\qquad k(t) = t$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = t^2$

c) La solution générale de l'équation complète est donc : $\boxed{x(t) = k\,t + t^2}$

19) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = t\,e^{-3t}$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + 6r + 9 = 0$ avec : $\Delta = 0$, et : $r_0 = -3$ La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = (\lambda t + \mu)\,e^{-3t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr}
(9) & x(t) & = & z(t)e^{-3t} \\
(6) & x'(t) & = & \big(z'(t) - 3z(t)\big)e^{-3t} \\
(1) & x''(t) & = & \big(z''(t) - 6z'(t) + 9z(t)\big)e^{-3t}
\end{array}$$

Par identification :

$$\big(z''(t) - 6z'(t) + 9z(t)\big)e^{-3t} + 6\big(z'(t) - 3z(t)\big)e^{-3t} + 9e^{-3t} = t\,e^{-3t}$$
$$z''(t) = t$$
$$z'(t) = \frac{t^2}{2} \qquad z(t) = \frac{t^3}{6}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = \dfrac{t^3}{6}\,e^{-3t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{t^3}{6} + \lambda t + \mu\right)e^{-3t}}$$

---

20) $x''(t) - x(t) = 3e^{-2t} + t^2 + 1$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 - 1 = 0$ avec : $\Delta = 4$, $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$ La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t}$

b) On cherche d'abord une solution particulière de l'équation : $x''(t) - x(t) = 3e^{-2t}$

$$\begin{array}{c|rcr}
(-1) & x(t) & = & ae^{-2t} \\
(0) & x'(t) & = & -2ae^{-2t} \\
(1) & x''(t) & = & 4ae^{-2t}
\end{array}$$

Par identification : $3a\,e^{-2t} = 3e^{-2t}$ donc : $a = 1$ et un solution particulière de l'équation est : $x(t) = e^{-2t}$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation : $x''(t) - x(t) = t^2 + 1$

$$\begin{array}{c|rcr}
(-1) & x(t) & = & at^2 + bt + c \\
(0) & x'(t) & = & 2at + b \\
(1) & x''(t) & = & 2a
\end{array}$$

Par identification : $-at^2 - bt - c + 2a = t^2 + 1$ donc : $a = -1$ $b = 0$ et $c = -3$
Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = -t^2 - 3$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{t} + e^{-2t} - t^2 - 3}$$

---

21) $t\,x'(t) + 2x(t) = t^2$ avec: $I =]\,0\,;\,+\infty\,[$
Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $\dfrac{2}{t}$ est : $2\ln(t)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{-2\ln(t)} = \dfrac{k}{t^2}$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|ccc} (2) & x(t) & = & \dfrac{k(t)}{t^2} \\ (t) & x'(t) & = & \dfrac{k'(t)\,t - 2k(t)}{t^3} \end{array}$$

Par identification :

$$\frac{k'(t)\,t - 2k(t) + 2k(t)}{t^2} = t^2$$
$$k'(t)\,t = t^4$$
$$k'(t) = t^3 \qquad\qquad k(t) = \frac{t^4}{4}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = \frac{k}{t^2} + \frac{t^2}{4}}$$

---

22) $\dfrac{\mathrm{d}^2\,x(t)}{\mathrm{d}\,t^2} - 4x(t) = 3e^{-t} - t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 - 4 = 0$ avec : $\Delta = 16,\ r_1 = -2$ et $r_2 = 2$
La solution générale de l'équation sans second menbre est :

$$x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t}$$

b) On cherche d'abord une solution particulière de l'équation : $x''(t) - 4x(t) = 3e^{-t}$

$$\begin{array}{c|rcr} (-4) & x(t) & = & ae^{-t} \\ (0) & x'(t) & = & -ae^{-t} \\ (1) & x''(t) & = & ae^{-t} \end{array}$$

Par identification : $-3a\,e^{-2t} = 3e^{-2t}$ donc : $a = -1$ et un solution particulière de l'équation est : $x(t) = -e^{-t}$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation : $x''(t) - 4x(t) = -t^2$

$$\begin{array}{c|rcr} (-4) & x(t) & = & at^2 + bt + c \\ (0) & x'(t) & = & 2at + b \\ (1) & x''(t) & = & 2a \end{array}$$

Par identification : $-4at^2 - 4bt - 4c + 2a = -t^2$ donc : $a = \dfrac{1}{4}$ $b = 0$ et $c = \dfrac{1}{8}$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{1}{8}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t} - e^{-t} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}}$$

---

23) $x''(t) + x(t) = e^t\cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + 1 = 0$ avec : $\Delta = -4$, et $r = \pm i$ on a donc : $\alpha = 0$ et $\beta = 1$

La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$

b) En utilisant les formules d'Euler on a : $e^t\cos(t) = e^t\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \dfrac{e^{(1+i)t}}{2} + \dfrac{e^{(1-i)t}}{2}$

On va décomposer l'équation en somme de deux équations conjuguées :

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{2}e^{(1+i)t} \qquad \text{et} \qquad x''(t) + x(t) = \frac{1}{2}e^{(1-i)t}$$

On va chercher une solution particulière de l'équation complexe : $x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{2}e^{(1+i)t}$

$$\begin{array}{c|rcr} (1) & x(t) & = & a\,e^{(1+i)t} \\ (0) & x'(t) & = & (1+i)\,a\,e^{(1+i)t} \\ (1) & x''(t) & = & 2i\,a\,e^{(1+i)t} \end{array}$$

Par identification : $(1+2i)a\,e^{(1+i)t} = \dfrac{1}{2}e^{(1+i)t}$ donc : $a = \dfrac{1}{2(1+2i)} = \dfrac{1-2i}{2\times 5}$

Une solution particulière complexe de l'équation est :

$$x(t) = \frac{1-2i}{2\times 5}\,e^{(1+i)t}$$

Retour à la solution réelle : On va faire la somme des deux solutions conjuguées.
Une solution particulière de l'équation complète est donc :

$$\begin{aligned}
x(t)+\overline{x(t)} &= \frac{1-2i}{2\times 5}e^{(1+i)t}+\frac{1+2i}{2\times 5}e^{(1-i)t}\\
&= \frac{1}{5}\,e^{t}\,\left(\frac{1-2i}{2}e^{it}+\frac{1+2i}{2}e^{-it}\right)\\
&= \frac{1}{5}\,e^{t}\,\left(\frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})+\frac{-2i}{2}(e^{it}-e^{-it})\right)\\
&= \frac{1}{5}\,e^{t}\,\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{5}\,\big(\cos(t)+2\sin(t)\big)\,e^{t}
\end{aligned}$$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t)=\lambda\cos(t)+\mu\sin(t)+\frac{1}{5}\big(\cos(t)+2\sin(t)\big)e^{t}}$$

---

24) $t^2\,x'(t)=x(t)$ avec: $I=\,]\,0\,;\,+\infty\,[$

Équation linéaire du premier ordre sans second membre :

$$t^2\,x'(t)-x(t)=0$$

Une primitive sur I de $-\dfrac{1}{t^2}$ est : $\dfrac{1}{t}$

La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t)=k\,e^{-\frac{1}{t}}}$$

---

25) $(t^2+1)\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}=2t$ avec: $I=\mathbb{R}$

Cette équation n'est qu'un simple calcul de primitive :

$$x'(t)=\frac{2t}{t^2+1}$$

La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t)=\ln(t^2+1)+k}$$

---

26) $x''(t)+5x'(t)+6x(t)=3e^{-2t}$ avec: $I=\mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + 5r + 6 = (r+3)(r+2) = 0$ avec : $\Delta = 1$, $r_1 = -3$ et $r_2 = -2$
La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda e^{-3t} + \mu e^{-2t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (6) & x(t) & = & z(t)e^{-2t} \\ (5) & x'(t) & = & \big(z'(t) - 2z(t)\big)e^{-2t} \\ (1) & x''(t) & = & \big(z''(t) - 4z'(t) + 4z(t)\big)e^{-2t} \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \big(z''(t) - 4z'(t) + 4z(t)\big)e^{-2t} + 5\big(z'(t) - 2z(t)\big)e^{-2t} + 6e^{-3t} &= 3\,e^{-2t} \\ z''(t) + z'(t) &= 3 \\ z'(t) &= 3 \qquad\qquad z(t) = 3\,t \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = 3\,t\,e^{-2t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-3t} + (3t + \mu)e^{-2t}}$$

---

27) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 5e^{-t}$ avec: $I = \mathbb{R}$
Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 + 3r + 2 = (r+2)(r+1) = 0$ avec : $\Delta = 1$, $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$
La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu e^{-t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (2) & x(t) & = & z(t)e^{-t} \\ (3) & x'(t) & = & \big(z'(t) - z(t)\big)e^{-t} \\ (1) & x''(t) & = & \big(z''(t) - 2z'(t) + z(t)\big)e^{-t} \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \big(z''(t) - 2z'(t) + z(t)\big)e^{-t} + 3\big(z'(t) - z(t)\big)e^{-t} + 2e^{-t} &= 5\,e^{-2t} \\ z''(t) + z'(t) &= 5 \\ z'(t) &= 5 \qquad\qquad z(t) = 5\,t \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = 5\,t\,e^{-2t}$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \lambda e^{-2t} + (5t + \mu)e^{-t}}$$

28) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}\,t^2} - 2\dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} + 2x(t) = e^t \cos(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 2 = 0$ avec : $\Delta = -4$, et $r = 1 \pm i$ on a donc : $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

La solution générale de l'équation sans second menbre est : $x(t) = \big(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\big)e^t$

b) En utilisant les formules d'Euler on a : $e^t \cos(t) = e^t \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \dfrac{e^{(1+i)t}}{2} + \dfrac{e^{(1-i)t}}{2}$

On va décomposer l'équation en somme de deux équations conjuguées :

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{2}e^{(1+i)t} \qquad \text{et} \qquad x''(t) + x(t) = \frac{1}{2}e^{(1-i)t}$$

On va chercher une solution particulière de l'équation complexe : $x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{2}e^{(1+i)t}$ mais en remarquant qu'on a la même forme que dans la partie **a)**

$$\begin{array}{r|rcr}
(2) & x(t) & = & z(t)\, e^{(1+i)t} \\
(-2) & x'(t) & = & \big(z'(t) + (1+i)z(t)\big)\, e^{(1+i)t} \\
(1) & x''(t) & = & \big(z''(t) + 2(1+i)z'(t) + 2iz(t)\big)\, e^{(1+i)t}
\end{array}$$

Par identification : $\big(z''(t) + iz'(t)\big)\, e^{(1+i)t} = \dfrac{1}{2}e^{(1+i)t}$

Donc : $z'(t) = \dfrac{1}{2i}$ et $z(t) = \dfrac{t}{2i}$

Une solution particulière complexe de l'équation est :

$$x(t) = \frac{t}{2i}\, e^{(1+i)t}$$

Retour à la solution réelle : On va faire la somme des deux solutions conjuguées.

Une solution particulière de l'équation complète est donc :

$$\begin{aligned}
x(t) + \overline{x(t)} &= \frac{t}{2i}e^{(1+i)t} - \frac{t}{2i}e^{(1-i)t} \\
&= t\, e^t \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) \\
&= t\, \sin(t)\, e^t
\end{aligned}$$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \tfrac{1}{2}\big(\lambda \cos(t) + (t + \mu) \sin(t)\big)e^t}$$

29) $x'(t) - 2t^2x(t) = 3t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $-2t^2$ est : $-\dfrac{2t^3}{3}$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\, e^{\dfrac{2t^3}{3}}$

b) Une solution particulière «èvidente» de l'équation complète est : $x(t) = -\dfrac{3}{2}$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = k\, e^{\dfrac{2t^3}{3}} - \dfrac{3}{2}}$$

---

30) $x'(t) + \sin(t)x(t) = \sin(t)$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $\sin(t)$ est : $-\cos(t)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\, e^{\cos(t)}$

b) Une solution particulière «èvidente» de l'équation complète est : $x(t) = 1$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = k\, e^{\cos(t)} + 1}$$

---

31) $x''(t) + x'(t) + x(t) = t^2$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du second ordre avec second membre :

a) L'équation caractéristique est : $r^2+r+1 = 0$ avec : $\Delta = -3$, et : $r = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

donc : $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ La solution générale de l'équation sans second menbre est :

$$x(t) = \left(\lambda \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) e^{-\frac{1}{2}t}$$

b) On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme :

$$\begin{array}{c|rcr} (1) & x(t) & = & a\,t^2 + b\,t + c \\ (1) & x'(t) & = & 2a\,t + b \\ (1) & x''(t) & = & 2a \end{array}$$

Par identification : $a\,t^2 + (b+2a)\,t + (c+b+2a) = t^2$ donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b+2a & = & 0 \\ c+b+2a & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{donc :} \quad \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 1 \\ b & = & -2 \\ c & = & 0 \end{array}\right.$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = t^2 - 2t$

c) La solution générale de l'équation complète est :

$$\boxed{x(t) = \Big(\lambda\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\Big)\, e^{-\frac{1}{2}t} + t^2 - 2t}$$

---

32) $x'(t) + \sin(t)x(t) = e^{\cos(t)}$ avec: $I = \mathbb{R}$

Équation linéaire du premier ordre avec second membre :

a) Une primitive sur I de $\sin(t)$ est : $-\cos(t)$ donc la solution générale de l'équation sans second membre est : $x(t) = k\,e^{\cos(t)}$

b) Méthode de Lagrange pour trouver une solution particulière de l'équation complète :

$$\begin{array}{c|rcr} (\sin(t)) & x(t) & = & k(t)\,e^{\cos(t)} \\ (1) & x'(t) & = & \big(k'(t) - \sin(t)\big)e^{\cos(t)} \end{array}$$

Par identification :

$$\begin{aligned} \sin(t)k(t)\,e^{\cos(t)} + \big(k'(t) - \sin(t)\big)e^{\cos(t)} &= e^{\cos(t)} \\ k'(t)\,e^{\cos(t)} &= e^{\cos(t)} \\ k'(t) &= 1 \qquad\qquad k(t) = t \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation complète est donc : $x(t) = t\,e^{\cos(t)}$

c) La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\boxed{x(t) = (k+t)\,e^{\cos(t)}}$$