Exercices sur les Développements Limités

1)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2} \qquad \lim_{t\to 2} \frac{2^t-4}{t-2} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\ln\left(\frac{e^t-1}{t}\right)$$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t\,\ln(t)}{t^2-1} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t)}{1-e^{2t}} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{2e^t-t^2-2t-2}{2\ln(1+t)+t^2-2t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2\sin(t)}{t-\sin(t)} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1-t}{1+\cos(t)} \qquad \lim_{t\to +\infty} \left[t - t^2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]$$

2)

Déterminer les développements limités au voisinage de zéro, à l'ordre 4, des expressions suivantes :

$$\ln(1+t)-\sin(t) \qquad e^{\cos(t)} \qquad \ln\big(\cos(t)\big) \qquad \cos\big(\sin(t)\big) \qquad \sqrt{1+\sin(t)}$$

$$\frac{t^4+4}{t^2+1} \qquad \frac{t}{e^t+1} \qquad e^{(1+t)} \qquad \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \qquad \cos\left(1-e^t\right)$$

$$\cos\big(\sin^2(t)\big) \qquad e^{\sin(t)} \qquad \frac{t^2+3t+1}{4t+1} \qquad \sin(t)\sin(2t) \qquad \sqrt{\cos(t)}$$

3)

Étudier et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$x \longmapsto y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{2} - \ln(x)\right)$$

On fera un DL à l'ordre 3 au voisinage de $x=1$, pour déterminer la position de la courbe par rapport à la parabole d'équation : $y = \dfrac{(x-1)^2}{2}$

4)

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f: \quad x \mapsto y = f(x) = \dfrac{x^2-1}{2}\, e^{\frac{1}{x}}$

b) $g: \quad x \mapsto y = g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$

On peut utiliser un DL au voisinage de l'infini pour déterminer les asymptotes obliques.

Développements Limités (Solutions)

1)

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2) = \boxed{4}$

b) $\displaystyle \lim_{t\to 2} \frac{2^t-4}{t-2}$ On pose $t = 2+u$ avec $u \to 0$

$$\frac{2^t-4}{t-2} = \frac{2^{2+u}-4}{(2+u)-2} = \frac{4\times 2^u-4}{u} = \frac{4\,(2^u-1)}{u} = \frac{4\,(e^{u\ln(2)}-1)}{u}$$

On sait que $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc : $e^{u\ln(2)} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u\ln(2)$

$$\lim_{t\to 2} \frac{2^t-4}{t-2} = \lim_{u\to 0} \frac{4\,(e^{u\ln(2)}-1)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{4\,u\ln(2)}{u} = \boxed{4\ln(2)}$$

c) $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{e^t-1}{t}\right)$ On va faire un DL à l'ordre 2 :

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + t^2 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)} \qquad \frac{e^t-1}{t} = 1 + \frac{t}{2} + t^1 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

On sait que : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc : $\displaystyle \ln\left(\frac{e^t-1}{t}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$ et $\displaystyle \frac{1}{t} \ln\left(\frac{e^t-1}{t}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2t}$

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = \frac{1}{2}}$$

d) $\displaystyle \lim_{t\to 1} \frac{t\,\ln(t)}{t^2-1}$ On pose $t = 1+u$ avec $u \to 0$

$$\frac{t\,\ln(t)}{t^2-1} = \frac{(1+u)\,\ln(1+u)}{(1+u)^2-1} = \frac{(1+u)\,\ln(1+u)}{2u+u^2} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1\times u}{2u}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 1} \frac{t\,\ln(t)}{t^2-1} = \lim_{u\to 0} \frac{(1+u)\,\ln(1+u)}{2u+u^2} = \frac{1}{2}}$$

e) $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t)}{1-e^{2t}}$

$$\frac{\sin(3t)}{1-e^{2t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{3t}{-2t} \qquad \text{donc : } \boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(3t)}{1-e^{2t}} = -\frac{3}{2}}$$

f) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{2e^t-t^2-2t-2}{2\ln(1+t)+t^2-2t}$ On va faire un DL à l'ordre 3 :

$$2e^t-t^2-2t-2=2\Big(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big)-t^2-2t-2\;=\;\frac{t^3}{3}+t^3\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$2\ln(1+t)+t^2-2t=2\Big(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big)+t^2-2t\;=\;2\,\frac{t^3}{3}+t^3\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\frac{2e^t-t^2-2t-2}{2\ln(1+t)+t^2-2t}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{\frac{t^3}{3}}{\frac{2\,t^3}{3}}\qquad\text{donc :}\qquad\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{2e^t-t^2-2t-2}{2\ln(1+t)+t^2-2t}=\frac{1}{2}}$$

g) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(t)}{t-\sin(t)}$ Équivalence au numérateur et DL à l'ordre 3 au dénominateur :

$$t^2\sin(t)\underset{t\to 0}{\sim}t^3$$

$$t-\sin(t)=t-\Big(t-\frac{t^3}{3}+t^3\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^3}{3}$$

$$\frac{t^2\sin(t)}{t-\sin(t)}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{t^3}{\frac{t^3}{6}}\qquad\text{donc :}\qquad\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin(t)}{t-\sin(t)}=6}$$

h) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-t}{1+\cos(t)}$ «évident» $\displaystyle\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-t}{1+\cos(t)}=0}$

i) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left[t-t^2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]$ On pose $t=\dfrac{1}{u}$ avec $u\to 0$

$$t-t^2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)$$

On fait alors un DL à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\Big(u-\frac{u^2}{2}+u^2\underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}\Big)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}-u^0\underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\left[t-t^2\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\ln(1+u)\right]=\frac{1}{2}}$$

2)

Déterminer les développements limités au voisinage de zéro, à l'ordre 4, des expressions suivantes :

a) $\ln(1+t) - \sin(t)$

$$\Big(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big) - \Big(t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big) = \boxed{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{4} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

b) $e^{\cos(t)}$

$$e^{\cos(t)} = e^1\, e^{\cos(t)-1}$$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\cos(t) - 1 = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$e^{\cos(t)-1} = 1 + (-\tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^4}{24}) + \frac{\frac{t^4}{4}}{2} + \frac{0^3}{6} + \frac{0^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{e^{\cos(t)} = e\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\right)}$$

c) $\ln\big(\cos(t)\big)$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\ln\big(\cos(t)\big) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\right)$$

$$= (-\tfrac{t^2}{2} - \tfrac{t^4}{24}) - \frac{\frac{t^4}{4}}{2} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\ln\big(\cos(t)\big) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

d) $\cos\big(\sin(t)\big)$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\cos\big(\sin(t)\big) = 1 - \frac{t^2 - \frac{t^4}{3}}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\cos\big(\sin(t)\big) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{5\,t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

e) $\sqrt{1+\sin(t)}$

$$\sqrt{1+u} \;=\; \big(1+u\big)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5\,u^4}{128} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0\\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\sqrt{1+\sin(t)} = 1 + \frac{t - \frac{t^3}{6}}{2} - \frac{t^2 - \frac{t^4}{3}}{8} + \frac{t^3}{16} - \frac{5\,t^4}{128} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+\sin(t)} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{384} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

f) $\dfrac{t^4+4}{t^2+1}$ Par division euclidienne selon les puissances croissantes :

$$\boxed{\frac{4+t^4}{1+t^2} = 4 - 4\,t^2 + 5\,t^4 + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

g) $\dfrac{t}{e^t+1}$ Division euclidienne de t par $2 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^4}{24}$

$$\boxed{\frac{t}{e^t+1} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{48} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

h) $e^{(1+t)}$

$$\boxed{e^{(1+t)} = e^1\,e^t = e\Big(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\Big)}$$

i) $\ln\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0 \\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\frac{\sin(t)}{t} = 1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = (-\tfrac{t^2}{6} - \tfrac{t^4}{120}) - \frac{\frac{t^4}{36}}{2} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

j) $\cos\left(1-e^t\right)$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0 \\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$1 - e^t = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\cos\left(1-e^t\right) = 1 - \frac{t^2 + t^3 + \frac{7\,t^4}{12}}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\cos\left(1-e^t\right) = 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{4} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

k) $\cos\left(\sin^2(t)\right)$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0 \\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\sin^2(t) = \left(t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}\right)^2 = t^2 - \frac{t^4}{3} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\cos\left(\sin^2(t)\right) = 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{0^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\cos\left(\sin^2(t)\right) = 1 - \frac{t^4}{2} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

l) $e^{\sin(t)}$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0 \\ u\to 0}}{\varepsilon(u)}$$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$e^{\sin(t)} = 1 + (t - \tfrac{t^3}{6}) + \frac{t^2 - \frac{t^4}{3}}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{e^{\sin(t)} = 1 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{8} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

m) $\dfrac{t^2 + 3t + 1}{4t + 1}$ Par division euclidienne selon les puissances croissantes :

$$\boxed{\frac{t^2 + 3t + 1}{4t + 1} = 1 - t + 5\,t^2 - 20\,t^3 + 80\,t^4 + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

n) $\sin(t)\sin(2t)$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\sin(2t) = 2t - \frac{8\,t^3}{6} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\sin(t)\sin(2t) = 2\,t^2 - \frac{5\,t^4}{3} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

o) $\sqrt{\cos(t)}$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5\,u^4}{128} + u^4 \underset{\substack{\varepsilon(u)\to 0 \\ u\to 0}}{\varepsilon(u)} \qquad \text{et} \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\sqrt{\cos(t)} = 1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}}{2} - \frac{\frac{t^4}{4}}{8} + \frac{0^3}{16} - \frac{0^4}{128} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\sqrt{\cos(t)} = 1 - \frac{t^2}{4} - \frac{t^4}{96} + t^4 \underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0 \\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}}$$

3)

Étudier et représenter graphiquement la fonction suivante :

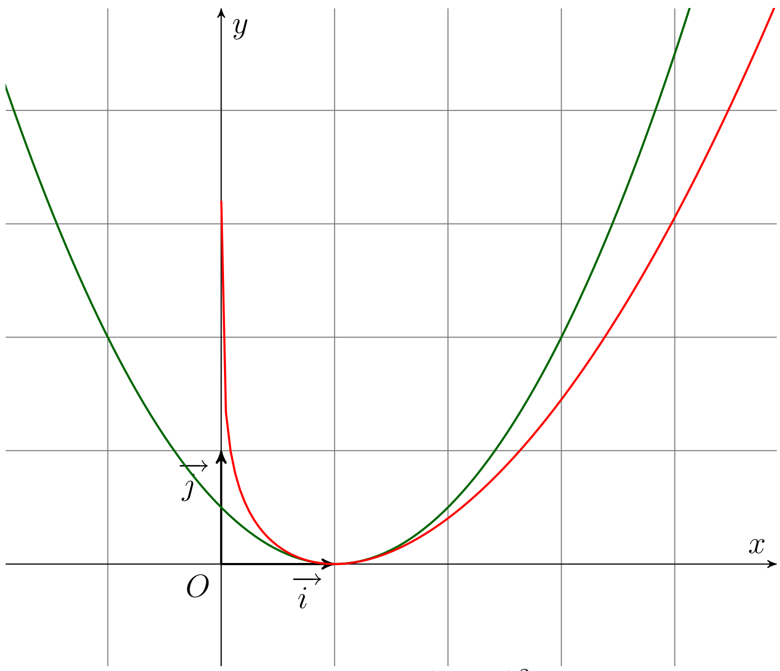
$$x \quad \longmapsto \quad y = f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{2} - \ln(x)\right)$$

On fera un DL à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$, pour déterminer la position de la courbe par rapport à la parabole d'équation : $\quad y = p(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2}$

Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}^{*+}$

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{2} - \ln(x)\right) \qquad \text{et} \qquad y = f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{2\,x}$$

x	0		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Parabole $\quad x \mapsto y = \dfrac{(x-1)^2}{2} \quad$ en vert

Courbe représentative de la fonction $\quad x \mapsto y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-1}{2} - \ln(x)\right) \quad$ en rouge

Pour faire le DL on pose $\quad x = 1 + t \quad$ avec $\quad t \to 0$

Pour la parabole : $\quad \dfrac{(x-1)^2}{2} = \dfrac{t^2}{2}$

Pour la fonction : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-1}{2}-\ln(x)\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1+t)^2-1}{2}-\ln(1+t)\right)$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2t+t^2}{2}-\ln(1+t)\right)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{t^2}{2}-\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{t^3\,\varepsilon(t)}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{t^3}{3}+\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{t^3\,\varepsilon(t)}\right)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}+\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{t^3\,\varepsilon(t)}$$

Position relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_p$ On a en revenant à la variable x :

Pour la parabole : $y=p(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$

Pour la fonction : $y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(x-1)^3}{6}+\underset{\substack{\varepsilon(x)\to 0\\ x\to 1}}{(x-1)^3\,\varepsilon(x)}$

$$f(x)-p(x)\underset{x\to 1}{\sim}-\frac{(x-1)^3}{6}$$

Au voisinage de $x=1$ les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_p$ passent par le point $(1;0)$ et ont la même tangente horisontale, mais, comme on le voit sur la figure ci-dessus :

$$\begin{cases} \text{Si } x>1 \;;\; -\dfrac{(x-1)^3}{6}<0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_p \\[2ex] \text{Si } x<1 \;;\; -\dfrac{(x-1)^3}{6}>0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } \mathcal{C}_p \end{cases}$$

---

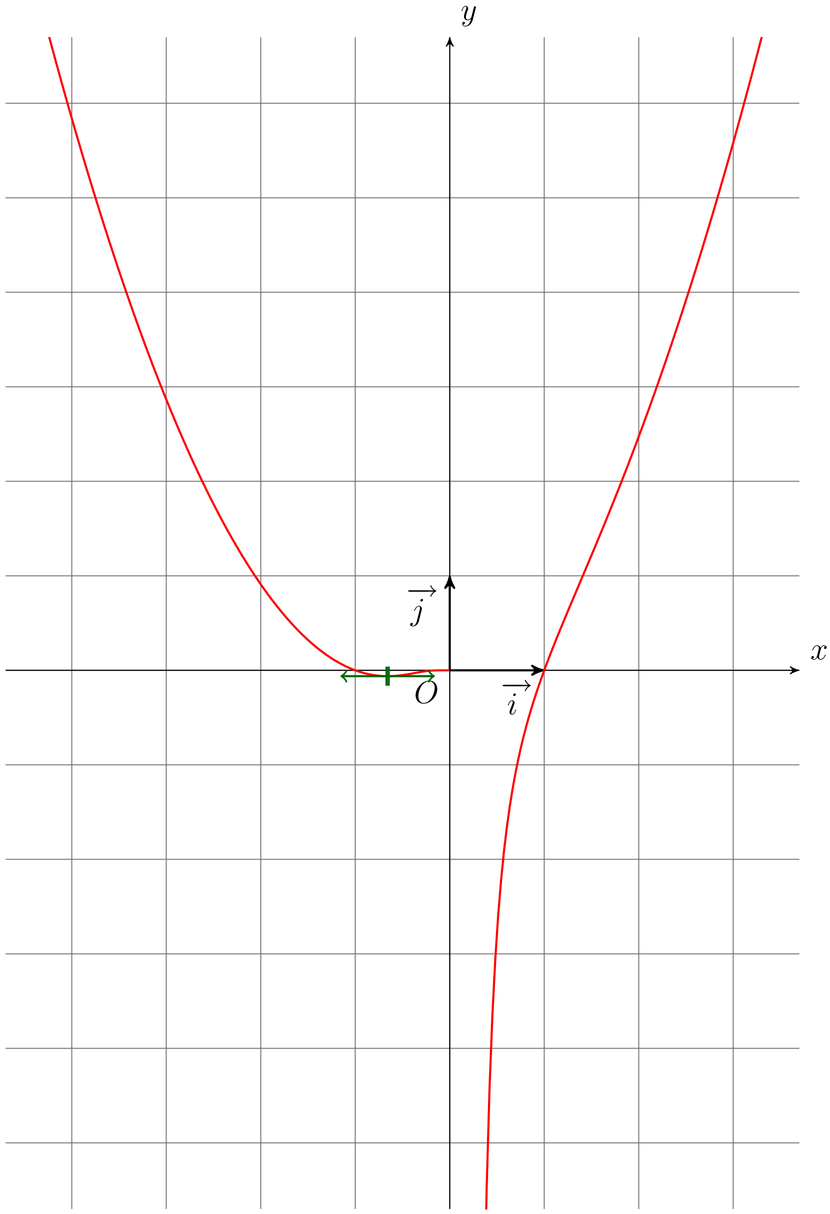
4)

Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f:\quad x\mapsto y=f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}\,e^{\frac{1}{x}}$ on a : $y'=f'(x)=\dfrac{2x^3-x^2+1}{2}\,e^{\frac{1}{x}}$

La dérivée s'annule et change de signe pour une valeur unique $\alpha\simeq -0,6573$ dont la valeur s'obtient par un calcul approché. On calcule de même : $f(\alpha)\simeq -0,06202$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$0 \parallel$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$0 \parallel -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



b) $g: \quad x \mapsto y = g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ on a : $y' = g'(x) = \dfrac{x\,(3x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$

Remarque : La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée g' n'est pas définie pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

On peut montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1} g'(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty \Vert -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty \Vert +\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On peut utiliser un DL au voisinage de l'infini pour déterminer les asymptotes obliques.

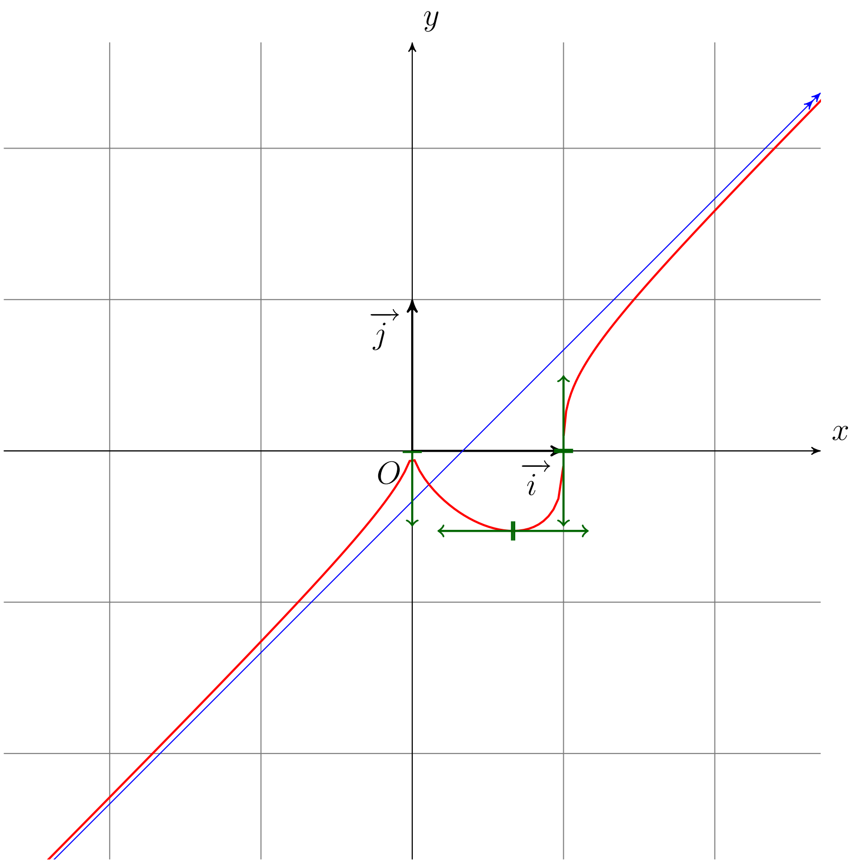
On va d'abord écrire $g(x)$ sous une forme plus pratique :

$$y = g(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)} = \sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)} = x\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$$

Puis faire un DL au voisinage de l'infini de $\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$ en posant $t = \frac{1}{x}$ avec $t \to 0$

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1-t} = (1-t)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} + t^2\,\underset{\substack{\varepsilon(t)\to 0\\ t\to 0}}{\varepsilon(t)}$$

Donc en revenant à la variable x : $\qquad y = g(x) = x\,\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} = x - \frac{1}{3} - \frac{9}{x} + \frac{1}{x}\,\underset{\substack{\varepsilon(x)\to 0\\ x\to\infty}}{\varepsilon(x)}$



Au voisinage de l'infini, $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g est asymptote à la droite d'équation : $y = x - \frac{1}{3}$ de plus :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \to -\infty \quad ; \quad -\frac{9}{x} > 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{C}_g \quad \text{est au dessus de l'asymptote} \\ \text{Si} \quad x \to +\infty \quad ; \quad -\frac{9}{x} < 0 \quad \text{alors} \quad \mathcal{C}_g \quad \text{est au dessous de l'asymptote} \end{cases}$$