Développement en Série de Fourier

1)

Développer en série de Fourier les fonctions de période T définies ainsi :

a) $\begin{cases} f \quad \textit{impaire} & T = 2 \\ f(t) = 1 & si \quad t \in]0\,;\,1[\end{cases}$

b) $\begin{cases} f \quad \textit{paire} & T = 2\pi \\ f(t) = t & si \quad t \in [0\,;\,\pi] \end{cases}$

Faire dans chaque cas une représentation graphique de la fonction f.

2)

Après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes, développer en série de Fourier la fonction de période $T = 2\pi$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \pi - t & si \quad t \in]0\,;\,\pi] \\ f(t) = -\pi - t & si \quad t \in [-\pi\,;\,0[\end{cases}$$

Déduire de ce développement en série de Fourier la valeur de : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$

3)

Soit la fonction de période $T = 2\pi$, définie par :

$$t \mapsto f(t) = t^2 + t \quad \text{si} \quad t \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

a) Construire une représentation graphique de f.

b) Déterminer le développement de f en série de Fourier.

4)

Développer en série de Fourier la fonction f de période $T = 2\pi$ *IMPAIRE* définie par :

$$f(t) = t(\pi - t) \quad \text{si}\, t \in [0\,;\,\pi]$$

après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes.

5)

Développer en série de Fourier la fonction f de période $T = 2\pi$ *PAIRE* définie par :

$$f(t) = t(\pi - t) \quad \text{si}\, t \in [0\,;\,\pi]$$

après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes.

6)

Soit f impaire de période $T = 2\pi$ telle que : $\begin{cases} f(t) = 1 & si \quad 0 < t < \frac{\pi}{3} \\ f(t) = 0 & si \quad \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ f(t) = -1 & si \quad \frac{2\pi}{3} < t < \pi \end{cases}$

Développer f en série de Fourier après l'avoir représentée sur trois périodes.

7)

Soit la fonction f de période $T = 4$ définie par : $t \mapsto f(t) = \dfrac{t}{4}$ pour : $0 < t < 2$

a) Développer f en une série de *cosinus* en la prolongeant comme une fonction *paire*.

b) Développer f en une série de *sinus* en la prolongeant comme une fonction *impaire*.

8)

Soit la fonction f définie par : $t \mapsto f(t) = |\sin(2t)|$

a) Préciser sa parité. Donner sa période.

b) Représenter graphiquement f.

c) Développer f en série de Fourier.

9) BTS Groupement A

Soit la fonction f de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$ définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$ par :

$$t \mapsto f(t) = \cos(t)$$

a) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$

b) Calculer la valeur efficace de f sur le même intervalle.

c) Déterminer le développement en série de Fourier de f.

d) Calculer les quatre premiers coefficients de ce développement.

Développement en Série de Fourier (Solutions)

1)

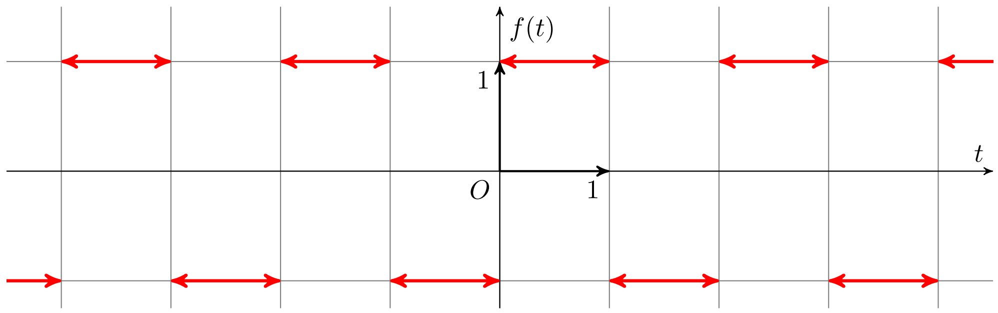
Développer en série de Fourier les fonctions de période T définies ainsi :

a) $\left\{\begin{array}{lll} f \quad \textit{impaire} & & T=2 \\ f(t)=1 & si & t \in]0\,;\,1[\end{array}\right.$

b) $\left\{ f(t)=t \quad si \quad t \in [0\,;\,\pi] \right.$

Faire dans chaque cas une représentation graphique de la fonction f.

a)



Comme la fonction f est impaire, on a : $\boxed{a_0=0}$; $\boxed{a_n=0}$ et aussi $\omega=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \sin(n\pi t)$ sont impaires, donc : $t \mapsto f(t)\sin(n\pi t)$ est paire

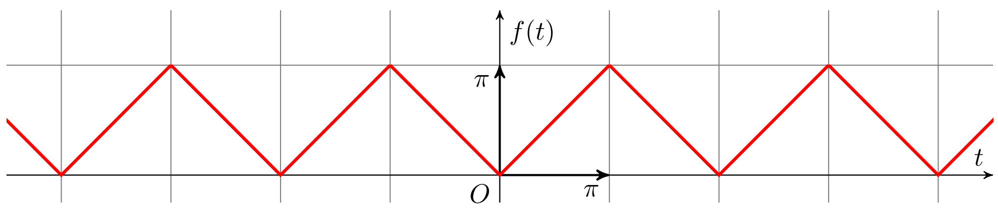
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)\,dt &&= \frac{2}{2}\,2\int_0^1 1\times\sin(n\pi t)\,dt \\ &= 2\int_0^1 \sin(n\pi t)\,dt &&= \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)-\left(-\frac{1}{n\pi}\right) &&= \frac{(-1)^n-1}{n\pi} \end{aligned}$$

$\boxed{b_n=\dfrac{(-1)^n-1}{n\pi}}$ et selon la parité : $\boxed{b_{2k}=0}$ $\boxed{b_{2k+1}=\dfrac{-2}{(2k+1)\pi}}$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{-2}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)\pi t\big)\right)=-\frac{2}{\pi}\left(\sin(\pi t)+\frac{1}{3}\sin(3\pi t)+\frac{1}{5}\sin(5\pi t)+\dots\right)}$$

b)



Comme la fonction f est paire, on a : $\boxed{b_n=0}$ et aussi $\omega=\dfrac{2\pi}{2\pi}=1$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \cos(n\pi t)$ sont paires, donc : $t \mapsto f(t)\cos(n\pi t)$ est paire

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc :} \qquad \boxed{a_0 = \frac{\pi}{2}}$$

On va faire une intégration par partie : $\left|\begin{array}{l} u = t \\ dv = \cos(nt)dt \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} du = dt \\ v = \dfrac{\sin(nt)}{n} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt &&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[t\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt &&= \frac{2}{\pi}\big((0)-(0)\big) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left(\left(-\frac{(-1)^n}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) &&= \frac{2\big((-1)^n-1\big)}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2\big((-1)^n-1\big)}{\pi n^2}} \qquad \text{et selon la parité :} \qquad \boxed{a_{2k} = 0} \qquad \boxed{a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{-4}{\pi(2k+1)^2}\cos\big((2k+1)t\big)\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{1}{9}\cos(3t) + \frac{1}{25}\cos(5t) + \dots\right)}$$

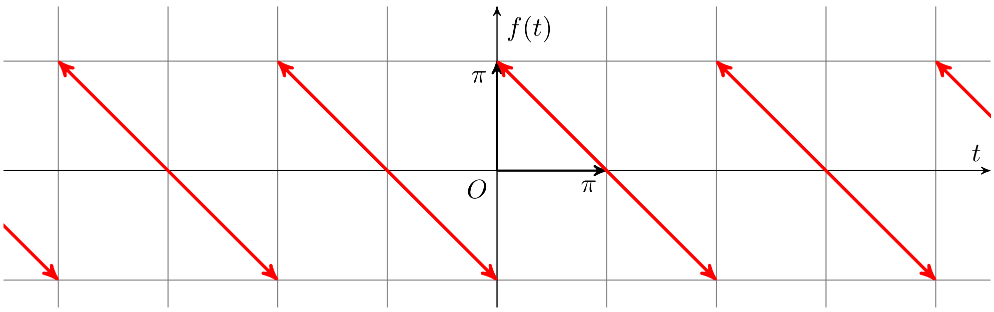
---

2)

Après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes, développer en série de Fourier la fonction de période $T = 2\pi$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(t) = \pi - t & si & t \in]0\,;\,\pi] \\ f(t) = -\pi - t & si & t \in [-\pi\,;\,0[\end{array}\right.$$

Déduire de ce développement en série de Fourier la valeur de : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$



Comme la fonction f est impaire, on a : $\boxed{a_0 = 0}$; $\boxed{a_n = 0}$ et aussi $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \sin(n\pi t)$ sont impaires, donc : $t \mapsto f(t)\sin(n\pi t)$ est paire

On va faire une intégration par partie : $\left|\begin{array}{l} u = \pi - t \\ dv = \sin(nt)dt \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} du = -dt \\ v = -\dfrac{\cos(nt)}{n} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt &&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - t)\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt &&= \frac{2}{\pi}\left((0) - \left(\frac{-\pi}{n}\right)\right) - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\big((0)-(0)\big) && \boxed{a_n = \frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} \sin\left(nt\right) \right) = 2 \left(\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{4}\sin(4t) + \dots \right)}$$

$$\begin{aligned}
S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \\
&= 2 \left(\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\sin(2\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3}\sin(3\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}\sin(4\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{5}\sin(5\frac{\pi}{2}) + \dots \right) \\
&= 2 \left((1) + \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{3}(-1) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{5}(1) + \dots \right) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}
\end{aligned}$$

Donc on peut en déduire la somme de la série : $\boxed{\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}}$

---

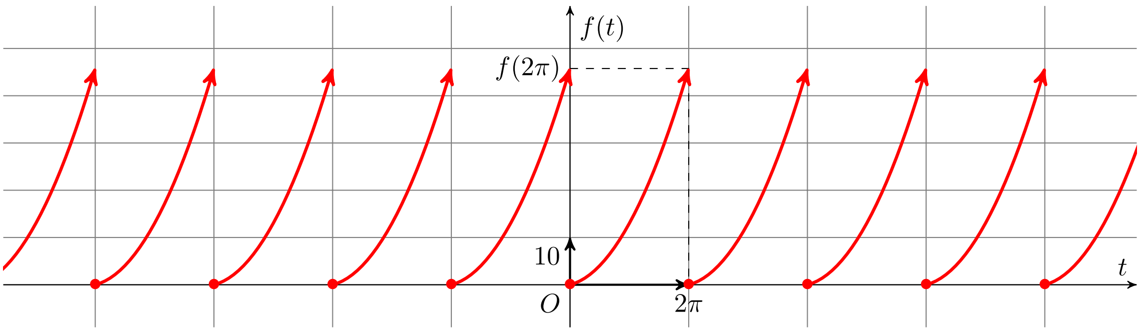
3)

Soit la fonction de période $T = 2\pi$, définie par :

$$t \mapsto f(t) = t^2 + t \quad \text{si} \quad t \in [\,0\,;\,2\pi\,[$$

a) Construire une représentation graphique de f.

b) Déterminer le développement de f en série de Fourier.



$$f(2\pi) = 4\pi^2 + 2\pi \simeq 45,8$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t^2+t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{8\pi^3}{3} + \frac{4\pi^2}{2}\right) = \boxed{\frac{4\pi^2+3\pi}{3}}$$

Par partie : $\left|\begin{array}{l} u = t^2+t \\ dv = \cos(nt)dt \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} du = (2t+1)dt \\ v = \dfrac{\sin(nt)}{n} \end{array}\right.$ 2 fois : $\left|\begin{array}{l} u = 2t+1 \\ dv = \sin(nt)dt \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} du = 2dt \\ v = -\dfrac{\cos(nt)}{n} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} (t^2+t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (t^2+t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[(t^2+t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}(2t+1)\sin(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((0) - (0) - \frac{1}{n}\left(\left[-(2t+1)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,dt\right)\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left((-\frac{4\pi+1}{n}) - (-\frac{1}{n}) + \frac{2}{n}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{-4\pi}{n} + 0\right) = \boxed{\frac{4}{n^2}}
\end{aligned}$$

Par partie : $\left| \begin{array}{l} u = t^2 + t \\ dv = \sin(nt)dt \end{array} \right| \begin{array}{l} du = (2t+1)dt \\ v = -\dfrac{\cos(nt)}{n} \end{array}$ 2 fois : $\left| \begin{array}{l} u = 2t+1 \\ dv = \cos(nt)dt \end{array} \right| \begin{array}{l} du = 2dt \\ v = \dfrac{\sin(nt)}{n} \end{array}$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(t^2+t)\sin(nt)\,dt \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(t^2+t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-(t^2+t)\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}(2t+1)\cos(nt)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left((-\frac{4\pi^2+2\pi}{n}) - (0) + \frac{1}{n}\left(\left[(2t+1)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,dt\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2+2\pi}{n} + \frac{1}{n}\left((0) - (0) - \frac{2}{n}\left[\frac{-cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2+2\pi}{n} + \frac{2}{n^2}\left((-\frac{1}{n}) - (-\frac{1}{n})\right)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2+2\pi}{n} + 0\right) \;=\; \boxed{\frac{2-4\pi}{n}}
\end{aligned}$$

En résumé : $\boxed{a_0 = \dfrac{4\pi^2+3\pi}{3}}$ $\boxed{a_n = \dfrac{4}{n^2}}$ $\boxed{b_n = \dfrac{2-4\pi}{n}}$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

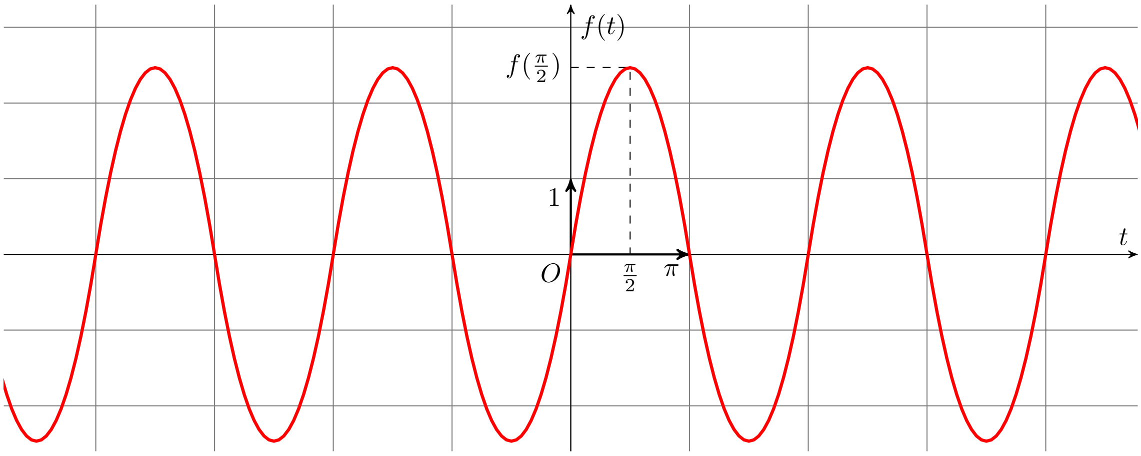
$$\boxed{S(t) = \frac{4\pi^2+3\pi}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos\left(nt\right) + \frac{2-4\pi}{n}sin\left(nt\right)\right)}$$

4)

Développer en série de Fourier la fonction f de période $T = 2\pi$ *IMPAIRE* définie par :

$$f(t) = t(\pi - t) \quad \text{si}\, t \in [0\,;\,\pi]$$

après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes.



$f(2\pi) = 4\pi^2 + 2\pi \simeq 45,8$

Attention ! ce sont des arcs de paraboles. $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} \simeq 2,47$

Comme la fonction f est impaire, on a : $\boxed{a_0 = 0}$; $\boxed{a_n = 0}$ et aussi $\omega = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \sin(nt)$ sont impaires, donc : $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ est paire

Par partie : $\left| \begin{array}{l} u = -t^2 + \pi t \\ dv = \sin(nt)dt \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} du = (-2t + \pi)dt \\ v = -\dfrac{\cos(nt)}{n} \end{array} \right.$ 2 fois : $\left| \begin{array}{l} u = -2t + \pi \\ dv = \cos(nt)dt \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} du = -2dt \\ v = \dfrac{\sin(nt)}{n} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\, 2 \int_0^{\pi} (-t^2 + \pi t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-(-t^2 + \pi t)\,\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} (-2t + \pi)\cos(nt)\,dt \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left((0) - (0) + \frac{1}{n}\left(\left[(-2t + \pi)\,\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt \right) \right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left((0) - (0) + \frac{2}{n}\left[-\frac{cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\left(\left(-\frac{(-1)^n}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right) \right)
\end{aligned}$$

$\boxed{b_n = \dfrac{4\big(1 - (-1)^n\big)}{n^3\pi}}$ et selon la parité : $\boxed{b_{2k} = 0}$ $\boxed{b_{2k+1} = \dfrac{8}{(2k+1)^3\pi}}$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

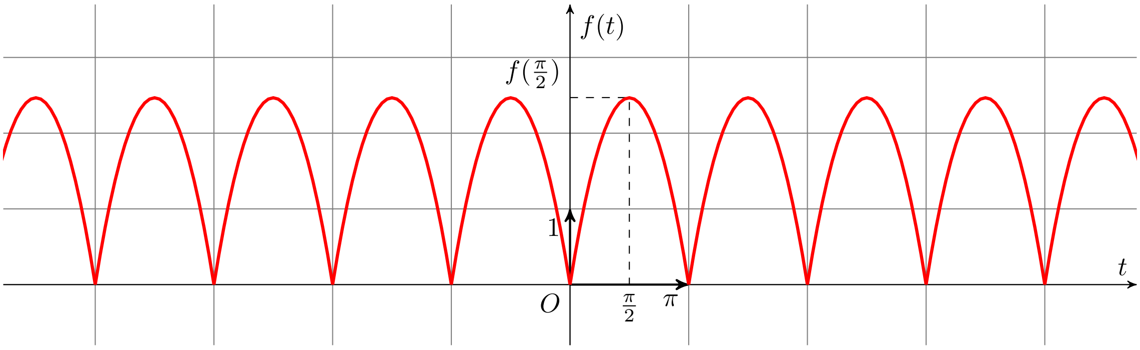
$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sin\,(nt)\right) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{27} + \frac{\sin(5t)}{125} + \dots\right)}$$

5)

Développer en série de Fourier la fonction f de période $T = 2\pi$ *PAIRE* définie par :

$$f(t) = t(\pi - t) \quad \text{si}\, t \in [0\,;\,\pi]$$

après l'avoir représentée graphiquement sur trois périodes.



Attention ! ce sont des arcs de parabole. $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} \simeq 2,47$

Remarque : Dans ce cas la période de f est en réalité $\boxed{T = \pi}$

Comme la fonction f est paire, on a : $\boxed{b_n = 0}$ et aussi $\omega = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{t^3}{3} + \pi\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \cos(nt)$ sont paires, donc : $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ est paire

Par partie : $\left| \begin{array}{l} u = -t^2 + \pi t \\ dv = \cos(2nt)dt \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} du = (-2t + \pi)dt \\ v = \dfrac{\sin(2nt)}{2n} \end{array} \right.$ 2 fois : $\left| \begin{array}{l} u = -2t + \pi \\ dv = \sin(2nt)dt \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} du = -2dt \\ v = -\dfrac{\cos(2nt)}{2n} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t^2 + \pi t)\cos(2nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[(-t^2 + \pi t)\,\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(-2t + \pi)\sin(2nt)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left((0) - (0) - \frac{1}{2n}\left(\left[-(-2t + \pi)\,\frac{\cos(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(2nt)\,dt\right)\right) \\
&= \frac{-1}{n\pi}\left((\frac{\pi}{2n}) - (\frac{-\pi}{2n}) - \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{-1}{n\pi}\left(\frac{2\pi}{2n} - \frac{1}{n} \times 0\right) \\
&= \frac{-1}{n^2}
\end{aligned}$$

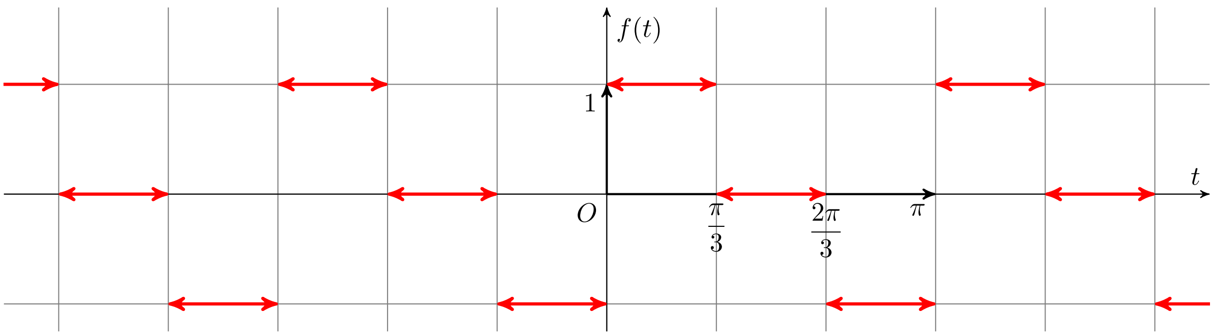
La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{n^2}\cos\left(2nt\right)\right) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos(2t) + \frac{\cos(4t)}{4} + \frac{\sin(6t)}{9} + \dots\right)}$$

6)

Soit f impaire de période $T = 2\pi$ telle que : $\begin{cases} f(t) = 1 & si \quad 0 < t < \frac{\pi}{3} \\ f(t) = 0 & si \quad \frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3} \\ f(t) = -1 & si \quad \frac{2\pi}{3} < t < \pi \end{cases}$

Développer f en série de Fourier après l'avoir représentée sur trois périodes.



Remarque : Dans ce cas la période de f est en réalité $\boxed{T = \pi}$

Comme la fonction f est impaire, on a : $\boxed{a_0 = 0}$ $\boxed{a_n = 0}$ et aussi $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(2nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\times\sin(2nt)\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 0\times\sin(2nt)\,dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(-1)\times\sin(2nt)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(2nt)\,dt - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\sin(2nt)\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[-\frac{\cos(2nt)}{2n}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\Big[-\cos(2nt)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \Big[-\cos(2nt)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\Big(-\cos(\tfrac{2n\pi}{3})\Big) - \Big(-\cos(0)\Big) - \Big(-\cos(2n\pi)\Big) + \Big(-\cos(\tfrac{4n\pi}{3})\Big)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n\pi}\Big(2 - \cos(\tfrac{2n\pi}{3}) - \cos(\tfrac{4n\pi}{3})\Big)}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 - \cos(\frac{2n\pi}{3}) - \cos(\frac{4n\pi}{3})}{n\pi}\sin\left(2nt\right)}$$

7)

Soit la fonction f de période $T = 4$ définie par : $t \mapsto f(t) = \frac{t}{4}$ pour : $0 < t < 2$

a) Développer f en une série de *cosinus* en la prolongeant comme une fonction *paire*.

b) Développer f en une série de *sinus* en la prolongeant comme une fonction *impaire*.

---

a) Comme la fonction f est paire, on a : $\boxed{b_n = 0}$ et aussi $\omega = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{2}{4}\int_{0}^{2}\frac{t}{4}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{2}-0\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \cos(n\frac{\pi}{2}t)$ sont paires, donc : $t \mapsto f(t)\cos(n\frac{\pi}{2}t)$ est paire

Intégration par partie : $\left|\begin{array}{l} u = t \\ dv = \cos(n\frac{\pi}{2}t)dt \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} du = dt \\ v = \dfrac{2}{n\pi}\sin(n\frac{\pi}{2}t) \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{2}\,2\int_0^2 \frac{t}{4}\cos(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^2 t\,\cos(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{2}{n\pi}\,t\,\sin(n\tfrac{\pi}{2}t)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin(n\frac{\pi}{2}t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((0)-(0)-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos(n\tfrac{\pi}{2}t)\right]_0^2\right) \\
&= \frac{-1}{2n\pi}\left(\Big(-\frac{2(-1)^n}{n\pi}\Big)-\Big(\frac{-2}{n\pi}\Big)\right) \\
&= \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}}$ et selon la parité : $\boxed{a_{2k} = 0}$ $\boxed{a_{2k+1} = \dfrac{-2}{(2k+1)^2\pi^2}}$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}t\right)\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)}{9} + \dots\right)}$$

b) Comme la fonction f est impaire, on a : $\boxed{a_n = 0}$ $\boxed{a_n = 0}$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \sin(n\frac{\pi}{2}t)$ sont impaires, donc : $t \mapsto f(t)\sin(n\frac{\pi}{2}t)$ est paire

Intégration par partie : $\left|\begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin(n\frac{\pi}{2}t)dt \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} du = dt \\ v = -\dfrac{2}{n\pi}\cos(n\frac{\pi}{2}t) \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\sin(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{2}\,2\int_0^2 \frac{t}{4}\sin(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^2 t\,\sin(n\tfrac{\pi}{2}t)\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{2}{n\pi}\,t\,\cos(n\tfrac{\pi}{2}t)\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos(n\frac{\pi}{2}t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((-\frac{4(-1)^n}{n\pi}) - (0) + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\,\sin(n\tfrac{\pi}{2}t)\right]_0^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{4(-1)^n}{n\pi} - 0\right) \\
& \boxed{b_n = \frac{-(-1)^n}{n\pi}}
\end{aligned}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-(-1)^n}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\sin\left(\pi t\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)}{3} - \dots\right)}$$

---

8)

Soit la fonction f définie par : $t \mapsto f(t) = |\sin(2t)|$

a) Préciser sa parité. Donner sa période.

b) Représenter graphiquement f.

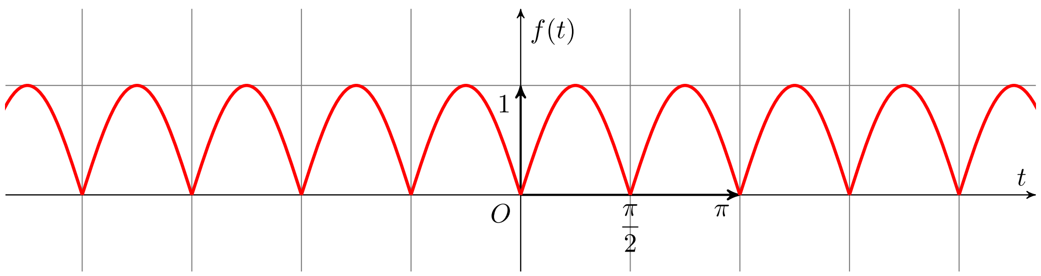
c) Développer f en série de Fourier.

---

a) La fonction $\boxed{f \text{ est paire}}$ en effet : $f(-t) = |\sin(-2t)| = |\sin(2t)| = f(t)$

On a : $f(t + \frac{\pi}{2}) = |\sin(2(t + \frac{\pi}{2}))| = |\sin(2t + \pi)| = |-\sin(2t)| = f(t)$ la période est $\boxed{T = \dfrac{\pi}{2}}$

b)



c) Comme la fonction f est paire, on a : $\boxed{b_n = 0}$ et aussi $\omega = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left((\frac{1}{2})-(\frac{-1}{2})\right) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(4nt)\,dt = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\sin\big((4n+2)t\big) - \sin\big((4n-2)t\big)\Big)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\big((4n+2)t\big)}{4n+2} + \frac{\cos\big((4n-2)t\big)}{4n-2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big(-\frac{\cos\big(2n\pi+\pi\big)}{4n+2} + \frac{\cos\big(2n\pi-\pi\big)}{4n-2}\Big) - \Big(-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n-2}\Big)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\Big(-\frac{-1}{4n+2}+\frac{-1}{4n-2}\Big) - \Big(-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n-2}\Big)\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n-2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{-4}{(4n+2)(4n-2)}\right) \\
&= \frac{-16}{\pi(4n+2)(4n-2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = \frac{-16}{\pi(16n^2-4)}}$$

La série de Fourier S associée à la fonction f est :

$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(4n\,t)}{16n^2-4} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(4t)}{3\pi} + \frac{\cos(8t)}{15\pi} + \frac{\cos(12t)}{35\pi} + \dots\right)}$$

9) BTS Groupement A

Soit la fonction f de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$ définie sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$ par :

$$t \mapsto f(t) = \cos(t)$$

a) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right]$

b) Calculer la valeur efficace de f sur le même intervalle.

c) Déterminer le développement en série de Fourier de f.

d) Calculer les quatre premiers coefficients de ce développement.

---

a) $$a_0 = \frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(t)\,dt = \frac{3}{2\pi}\Big[\sin(t)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2\pi}\left((\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{-\sqrt{3}}{2})\right) \qquad \boxed{a_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}$$

b) $$f_e^2 = \frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(t)\,dt = \frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{3}{2\pi}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$f_e^2 = \frac{3}{2\pi}\left((\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6})-(-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6})\right) = \frac{3\sqrt{3}+4\pi}{8\pi}$$

$$\boxed{f_e = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}+4\pi}{8\pi}}}$$

c) Comme la fonction f est paire, on a : $\boxed{b_n = 0}$ et aussi $\omega = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)\cos(3nt)\,dt = \frac{6}{\pi}\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(\cos\big((3n+1)t\big)+\cos\big((3n-1)t\big)\Big)\,dt \\ &= \frac{3}{\pi}\left[\frac{\sin\big((3n+1)t\big)}{3n+1}+\frac{\sin\big((3n-1)t\big)}{3n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{\pi}\left(\Big(\frac{\sin\big(n\pi+\frac{\pi}{3}\big)}{3n+1}+\frac{\sin\big(n\pi-\frac{\pi}{3}\big)}{3n-1}\Big)-\Big(0\Big)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = \frac{3}{\pi}\left(\frac{\sin\big(n\pi+\frac{\pi}{3}\big)}{3n+1}+\frac{\sin\big(n\pi-\frac{\pi}{3}\big)}{3n-1}\right)}$$

d) $$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\frac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin\big(n\pi+\frac{\pi}{3}\big)}{3n+1}+\frac{\sin\big(n\pi-\frac{\pi}{3}\big)}{3n-1}\right)\cos(3n\,t)}$$

Un petit effort de calcul permet d'obtenir le quatre premières harmoniques :

$$\boxed{S(t) = f(t) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(3\,t)}{8}-\frac{\cos(6\,t)}{35}+\frac{\cos(9\,t)}{80}-\frac{\cos(12\,t)}{143}+\dots\right)}$$

Complément : Si on pose $g(t) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(3\,t)}{8}-\frac{\cos(6\,t)}{35}+\frac{\cos(9\,t)}{80}-\frac{\cos(12\,t)}{143}\right)$

On peut calculer, en utilisant la formule de Parseval, la valeur efficace de g et la comparer à celle de f calculée ci-dessus.

$$g_e^2 \simeq 0,706688 \quad ; \quad f_e^2 \simeq 0,706748 \quad ; \quad \frac{g_e^2}{f_e^2} \simeq 0,999914$$